# Devoir en temps libre n° 1

E1A 2016-2017

correction

## 1 Substitution de variables

1. Commençons par les conditions d'existence :
   - Le nombre $|x|$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (voir cours).
   - Le nombre $-x$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Donc $|-x|$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Le nombre $\ln(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $|\ln(x)|$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - Le nombre $u(x)$ est défini si et seulement si $x \in D$. Donc $|u(x)|$ est défini si et seulement si $x \in D$ et $u(x) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in D$.
   - Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$ (voir cours).
   - Le nombre $-x$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Donc $\lfloor -x \rfloor$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Le nombre $\ln(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $\lfloor \ln(x) \rfloor$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \mathbb{R}$, c'est à dire si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   - Le nombre $u(x)$ est défini si et seulement si $x \in D$. Donc $\lfloor u(x) \rfloor$ est défini si et seulement si $x \in D$ et $u(x) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in D$.
   - Le nombre $\sqrt{x}$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$ (voir cours).
   - Le nombre $-x$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Donc $\sqrt{-x}$ est défini si et seulement $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \mathbb{R}_-$.
   - Le nombre $\ln(x)$ est défini quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc $\sqrt{\ln(x)}$ est défini si et seulement $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(x) \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in [1; +\infty[$.
   - Le nombre $u(x)$ est défini quel que soit $x \in D$. Donc $\sqrt{u(x)}$ est défini si et seulement $x \in D$ et $u(x) \in \mathbb{R}_+$.

Les définitions elles-mêmes s'obtiennent par simple substitution (sous condition d'existence) :

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert -x\rvert = \begin{cases} -x, & \text{si } -x > 0 \\ 0, & \text{si } -x = 0 \\ -(-x), & \text{si } -x < 0 \end{cases}$ | $\lvert\ln(x)\rvert = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } \ln(x) > 0 \\ 0, & \text{si } \ln(x) = 0 \\ -\ln(x), & \text{si } \ln(x) < 0 \end{cases}$ | $\lvert u(x)\rvert = \begin{cases} u(x), & \text{si } u(x) > 0 \\ 0, & \text{si } u(x) = 0 \\ -u(x), & \text{si } u(x) < 0 \end{cases}$ |
| $\lfloor -x \rfloor$ est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq -x$. | $\lfloor \ln(x) \rfloor$ est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq \ln(x)$. | $\lfloor u(x) \rfloor$ est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq u(x)$. |
| $\sqrt{-x}$ est l'unique réel $y \geq 0$ tel que $y^2 = -x$. | $\sqrt{\ln(x)}$ est l'unique réel $y \geq 0$ tel que $y^2 = \ln(x)$. | $\sqrt{u(x)}$ est l'unique réel $y \geq 0$ tel que $y^2 = u(x)$. |

*Remarque.* Certaines simplifications d'écriture sont possibles. Par exemple :

$$|-x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ x, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \qquad |\ln(x)| = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } x > 1 \\ 0, & \text{si } x = 1 \\ -\ln(x), & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

2. Il suffit de faire les substitutions :

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= \frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)^2}{3(k+1)+2^{k+1}} = (-1)^{k+1}\frac{k^2+2k+1}{3k+3+2^{k+1}} \\
u_{k+2} &= \frac{(-1)^{k+2}\,(k+2)^2}{3(k+2)+2^{k+2}} = (-1)^{k}\frac{k^2+4k+4}{3k+6+2^{k+2}} \\
u_{2k} &= \frac{(-1)^{2k}\,(2k)^2}{3(2k)+2^{2k}} = \frac{4k^2}{6k+4^k} \\
u_{2k-1} &= \frac{(-1)^{2k-1}\,(2k-1)^2}{3(2k-1)+2^{2k-1}} = \frac{-4k^2+4k-1}{6k-3+\frac{1}{2}4^k} \\
u_{k^2} &= \frac{(-1)^{k^2}\,(k^2)^2}{3(k^2)+2^{(k^2)}} = \frac{(-1)^k k^4}{3k^2+2^{k^2}} \\
u_{2^k} &= \frac{(-1)^{2^k}\,(2^k)^2}{3(2^k)+2^{(2^k)}} = \frac{(-1)^{2^k}4^k}{3\times 2^k+2^{2^k}}
\end{aligned}
$$

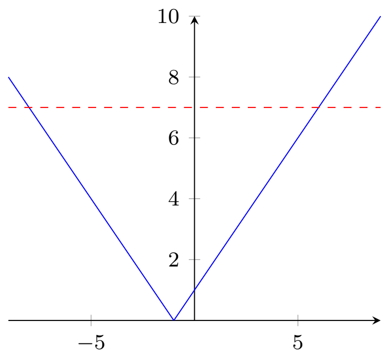
$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{2} u_i = u_0+u_1+u_2 = 0+\frac{-1}{3+2}+\frac{4}{6+4} = \frac{1}{5} \\
&\sum_{i=1}^{2} u_{2i} = u_2+u_4 = \frac{4}{6+4}+\frac{16}{12+16} = \frac{34}{35} \\
&\sum_{i=3}^{4} u_{i-1} = u_2+u_3 = \frac{5}{6+4}+\frac{-9}{9+8} = -\frac{11}{85} \\
&\sum_{i=1}^{2016} u_k = 2016\times u_k = \frac{(-1)^k 2016k^2}{3k+2^k} \\
&\sum_{i=k+1}^{k+1} u_i = u_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}\,(k+1)^2}{3(k+1)+2^{k+1}} \\
&\sum_{i=k}^{k+1} u_{(i-k)^2} = u_0+u_1 = 0+\frac{-1}{3+2} = -\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

## 2 Valeur absolue

**a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $|x+1|$ est donnée par le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1\rvert$ | | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ | |

Dans l'intervalle $]-\infty;-1]$, l'équation $-x-1=7$ a pour unique solution le réel $-8$. Dans l'intervalle $[-1;-\infty[$, l'équation $x+1=7$ a pour unique solution le réel 6. L'ensemble des solutions de l'équation $|x+1|=7$ dans $\mathbb{R}$ est donc $\{-8;6\}$. On peut le vérifier graphiquement sur la courbe de $x \mapsto |x+1|$ :




**b.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $|x+1|+|x+2|$ est donnée par le tableau :

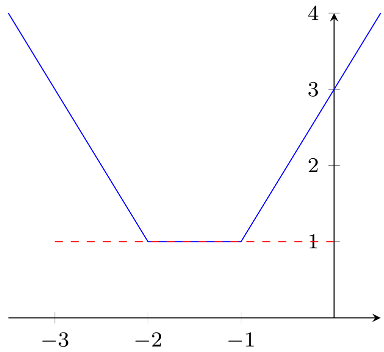
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1\rvert$ | | $-x-1$ | | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ | |
| $\lvert x+2\rvert$ | | $-x-2$ | $0$ | $x+2$ | | $x+2$ | |
| $\lvert x+1\rvert+\lvert x+2\rvert$ | | $-2x-3$ | | $1$ | | $2x+3$ | |

— Dans l'intervalle $]-\infty;-2[$, l'équation $-2x-3=1$ n'a aucune solution.

— Dans l'intervalle $[-2;-1]$, tout nombre est solution de $1=1$.

— Dans l'intervalle $]-1;+\infty[$, l'équation $2x+3=1$ n'a aucune solution.

L'ensemble des solutions de l'équation $|x+1|+|x+2|=1$ dans $\mathbb{R}$ est donc $[-2;-1]$. On peut le vérifier graphiquement en tracant la courbe de $x \mapsto |x+1|+|x+2|$.

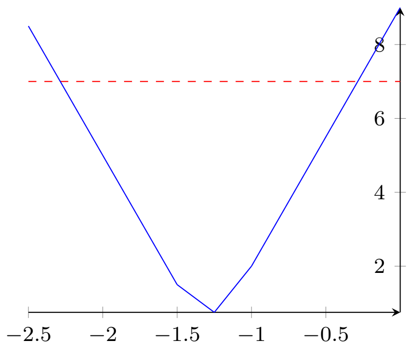



**c.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur de $|x+1|+|2x+3|+|4x+5|$ est donnée par le tableau

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1\rvert$ | $-x-1$ | $-x-1$ | $-x-1$ | $0$ | $x+1$ |
| $\lvert 2x+3\rvert$ | $-2x-3$ | $0$ | $2x+3$ | $2x+3$ | $2x+3$ |
| $\lvert 4x+5\rvert$ | $-4x-5$ | $-4x-5$ | $0$ | $4x+5$ | $4x+5$ |
| $\lvert x+1\rvert+\lvert 2x+3\rvert+\lvert 4x+5\rvert$ | $-7x-9$ | $-3x-3$ | $5x+7$ | $7x+9$ | |

On est ramené à résoudre quatre équations du premier degré :
— Dans l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, l'équation $-7x-9=7$ a pour unique solution $-\frac{16}{7}$.
— Dans l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right]$, l'équation $-3x-3=7$ n'a aucune solution.
— Dans l'intervalle $\left]-\frac{5}{4};-1\right]$, l'équation $5x+7=7$ n'a aucune solution.
— Dans l'intervalle $]-1;+\infty[$, l'équation $7x+9=7$ a pour unique solution $-\frac{2}{7}$.

L'ensemble des solution de $|x+1|+|2x+3|+|4x+5|$ dans $\mathbb{R}$ est donc finalement $\{-\frac{16}{7};-\frac{2}{7}\}$. On peut le vérifier graphiquement :




**d.** Les racines du polynôme $X^2+X-7$ sont $r_1=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ et $r_2=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$ et elles vérifient $r_1<0<r_2$. Pour tout $x$, la valeur de $|x^2+x-7|+|x|$ est donc donnée par le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $r_1$ | $0$ | $r_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x^2+x-7\rvert$ | $x^2+x-7$ | $0$ $-x^2-x+7$ | $-x^2-x+7$ | $0$ | $x^2+x-7$ |
| $\lvert x\rvert$ | $-x$ | $-x$ | $0$ $x$ | | $x$ |
| $\lvert x^2+x-7\rvert+\lvert x\rvert$ | $x^2-7$ | $-x^2-2x+7$ | $-x^2+7$ | $x^2+2x-7$ | |

On est donc ramené à la résolution de quatre inéquations du second degré :

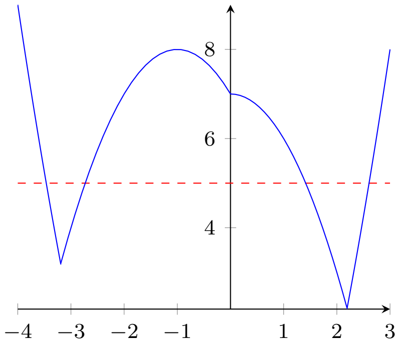
— Dans l'intervalle $]-\infty; r_1]$, l'inéquation $x^2 - 7 < 5$ a pour ensemble de solutions $\left]-2\sqrt{3}; r_1\right]$.

— Dans l'intervalle $]r_1; 0]$, l'inéquation $-x^2 - 2x + 7 < 5$ a pour ensemble de solutions $\left]r_1; -1-\sqrt{3}\right[$.

— Dans l'intervalle $]0; r_2]$, l'inéquation $-x^2 + 7 < 5$ a pour ensemble de solutions $\left[r_1; -1-\sqrt{3}\right[$ a pour ensemble de solutions $\left]\sqrt{2}; r_2\right]$.

— Dans l'intervalle $]r_2; +\infty[$, l'inéquation $x^2 + 2x - 7 < 5$ a pour ensemble de solutions $\left]r_2; -1+\sqrt{13}\right[$.

L'ensemble des solutions de $|x^2 + x - 7| + |x| < 5$ dans $\mathbb{R}$ est donc $\left]-2\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\right[ \cup \left]\sqrt{2}; -1+\sqrt{13}\right[$. On peut le vérifier graphiquement.




**e.** Le polynôme $X^2 - X + 6$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$. De plus $6 > 0$, donc il est partout strictement positif. Pour tout $x$ réel, on a donc $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = \sqrt{x^2 - x + 6}$. Procédons maintenant par analyse-synthèse :

— *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation $\sqrt{x^2 - x + 6} = x + 1$. Alors $x^2 - x + 6 = (x+1)^2$ et donc $x = \frac{5}{3}$ après simplifications.

— *Synthèse.* Posons $x = \frac{5}{3}$. Alors $x + 1 = \frac{8}{3}$, et $\sqrt{x^2 - x + 6} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$, donc $x$ est solution.

Ceci montre que l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = x + 1$ dans $\mathbb{R}$ est $\{\frac{5}{3}\}$.

# 3 Étude de fonctions

*Étude de* $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

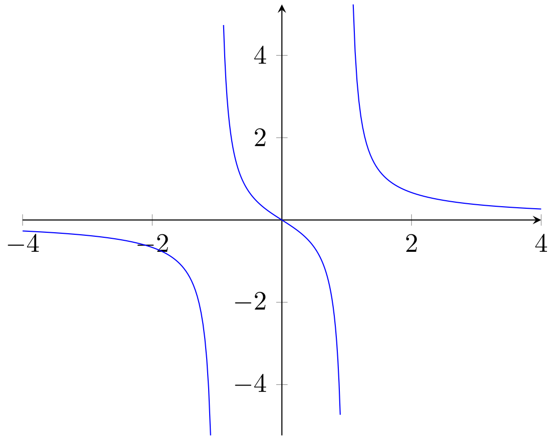
1. Le nombre $f(x)$ est bien défini si et seulement si $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Le domaine de définition de $f$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
2. La fonction $f$ est un quotient de fonctions polynomiales, donc elle est dérivable partout où elle est définie. Le domaine de dérivabilité est $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, on a $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Alors $(x^2 - 1)^2 > 0$ et $x^2 + 1 \geq 1$, donc $f'(x) < 0$.
5. Le tableau de signe de $f'$ donne les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| variations de $f$ | | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | |

6. Limites (facultatif, car pas encore vu en cours) :
   — Pour $x \to 1$ avec $x < 1$, on a $x^2 - 1 \to 0$ avec $x^2 - 1 < 0$, donc $f(x) \to 1 \times (-\infty) = -\infty$.
   — Pour $x \to 1$ avec $x > 1$, on a $x^2 - 1 \to 0$ avec $x^2 - 1 > 0$, donc $f(x) \to 1 \times (+\infty) = +\infty$.
   — Pour $x \to -1$ avec $x < -1$, on a $x^2 - 1 \to 0$ avec $x^2 - 1 > 0$, donc $f(x) \to (-1) \times (+\infty) = -\infty$.
   — Pour $x \to -1$ avec $x < -1$, on a $x^2 - 1 \to 0$ avec $x^2 - 1 > 0$, donc $f(x) \to (-1) \times (-\infty) = +\infty$.
   — Pour $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \longrightarrow 0 \times \dfrac{1}{1} = 0$.

— Pour $x \to -\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 0 \times \dfrac{1}{1} = 0$.

7. Graphe :




8. Symétries : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, on a $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x)$.
   La fonction est donc impaire, ce qui s'observe sur le graphe.

*Étude de* $g : x \mapsto \left|\dfrac{1}{x} - x\right|$.

1. Le nombre $g(x)$ est bien défini si et seulement si $x \neq 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}^*$.
2. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x} - x$ également. Par ailleurs, la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g$ est dérivable en $x$ si et seulement si $u(x) \neq 0$. Ceci équivaut à $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Le domaine de dérivabilité de $g$ est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$.
3. La dérivée de la fonction composée $g : x \mapsto |u(x)|$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$ par
$$g'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } u(x) > 0 \\ -u'(x) & \text{si } u(x) < 0 \end{cases}.$$
   Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 1$. Il reste à étudier le signe de $u$ sur $\mathbb{R}^*$. On utilise pour ceci la factorisation $u(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$ et on en déduit le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $u(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| valeur de $g'(x)$ | | $-\dfrac{1}{x^2} - 1$ | $\Vert$ | $\dfrac{1}{x^2} + 1$ | $\Vert$ | $-\dfrac{1}{x^2} - 1$ | $\Vert$ | $\dfrac{1}{x^2} + 1$ | |

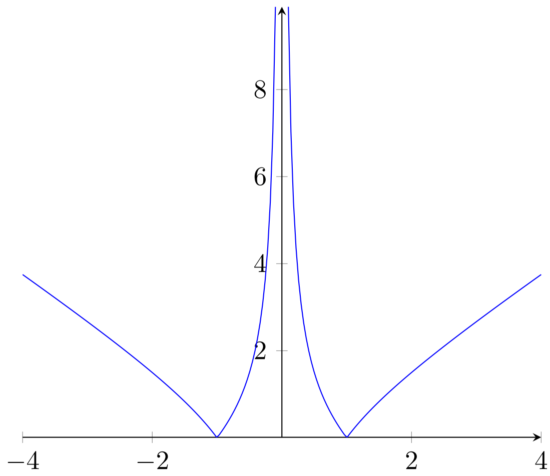
4. L'étude du signe de $g'$ est maintenant immédiate :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $g'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

5. Puis on en déduit les variations de $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

6. Limites (facultatif) : elles figurent dans le tableau ci-dessus.
7. Graphe :



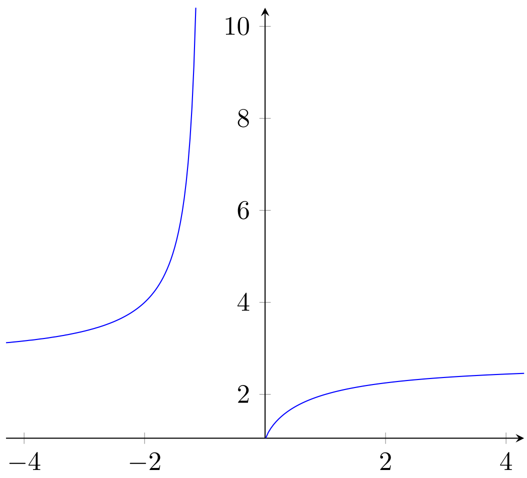

8. Symétries : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \left|\dfrac{1}{-x} - (-x)\right| = \left|-\left(\dfrac{1}{x} - x\right)\right| = \left|\dfrac{1}{x} - x\right| = g(x)$.
   La fonction $g$ est donc paire, ce qui s'observe sur le graphe.

*Étude de* $h : x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

1. Posons $u : x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Par définition des puissances généralisées, on a $h(x) = e^{u(x)}$ pour tout $x$ réel. Ce nombre $h(x)$ est bien défini si et seulement si $u(x)$ est bien défini, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$ (inverse) et $1 + \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ (logarithme). Une étude de signe de $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ montre que ceci est réalisé si et seulement si $x < -1$ ou $x > 0$.
   Le domaine de définition de $h$ est donc finalement $D_h = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$.
2. La fonction exp est partout dérivable, donc $h$ est dérivable en $x$ si et seulement si $u$ est dérivable en $x$, c'est à dire si et seulement si $x \in \mathbb{R}^*$ (fonction inverse) et $1 + \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$ (logarithme). Le domaine de dérivabilité de $h$ est donc à nouveau $]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$.
3. Soit $x$ dans ce domaine. Alors $h'(x) = e^{u(x)} u'(x)$. De plus $u'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) + x \ln'(1 + \frac{1}{x})(0 - \frac{1}{x^2})$ avec $\ln'(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$. On a donc finalement
$$h'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right].$$
4. Soit $x \in D_h$. Nous devons déterminer le signe de $h'(x) = e^{u(x)} w(x)$, où $w$ est la fonction définie pour tout $t \in D_h$ par $w(t) = \ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{1}{t+1}$. Puisque $e^{u(x)} > 0$, il suffit de déterminer le signe de $w(x)$. Nous étudions dans ce but la fonction $w$. Elle est dérivable en tout réel $t \in D_h$, avec
$$w'(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} \left(0 - \frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{t+1} \left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t}\right] = -\frac{1}{t(t+1)^2}.$$
   Ainsi :
   - $w'(t) > 0$ pour $t < -1$, donc $w$ est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$. De plus $\lim_{t \to -\infty} w(t) = 0$ donc $w(t) > 0$ pour tout $t \in ]-\infty; -1[$. A fortiori, $h'(x) > 0$ pour tout $x \in ]-\infty; -1[$.
   - $w'(t) < 0$ pour $t > 0$, donc $w$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus $\lim_{t \to +\infty} w(t) = 0$ donc $w(t) > 0$ pour tout $t \in ]0; +\infty[$. A fortiori, $h'(x) > 0$ pour tout $x \in ]0; +\infty[$.
5. Ceci permet d'établir le tableau de signe de $h'$ et d'en déduire les variations de $h$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $h'(x)$ | | $+$ | | | | $+$ | |
| variations de $h$ | $e$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | | $0$ | $\nearrow$ | $e$ |

6. Limites (facultatif) : on les a fait figurer dans le tableau ci-dessus.
7. Graphe :




## 4 Inégalité de Bernoulli

*Attention à la place du* i*, Bernoulli n'est pas une nouille !*

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes que pour tout réel $x \geq -1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

**Étude de fonction.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction polynomiale $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx.$$

1. On a $f_n(0) = 0$. Si $n$ est pair, $f_n(-2) = 2n$. Si $n$ est impair, $f_n(-2) = 2(n-1)$.
2. La fonction $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale. Sa dérivée est la fonction

$$f_n' : x \mapsto n\left[(1+x)^{n-1} - 1\right].$$

Supposons que $n$ est pair (et non nul). Alors $n-1$ est impair, donc la fonction $x \mapsto (1+x)^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $(1+0)^{n-1} - 1 = 0$, donc on obtient le tableau de signe suivant pour $f_n'$ et on en déduit les variations de $f_n$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f_n$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Supposons maintenant que $n$ est impair. Alors $n-1$ est pair, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) \leq 0 \iff (1+x)^{n-1} \leq 1 \iff |1+x| \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 0$. On en déduit le tableau de signe de $f_n'$ puis les variations de $f_n$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f_n$ | $-\infty$ | ↗ | $2(n-1)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

3. Soit $x \geq -1$. Montrons que $f_n(x) \geq 0$. Deux cas se présentent selon la parité de $n$ :

— Supposons $n$ est pair. D'après les variations ci-dessus, on a $f_n(t) \geq f_n(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or $f_n(0) = 0$, donc en particulier $f_n(x) \geq 0$.
— Supposons $n$ est impair. D'après les variations ci-dessus, on a $f_n(t) \geq f_n(0)$ pour tout $t \geq -2$. Or $f_n(0) = 0$ et $x \geq -1 \geq -2$, donc en particulier $f_n(x) \geq 0$.

4. Soit $x \geq -1$. D'après la question précédente, $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$. Donc $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Ceci montrer que pour tout $x \geq -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$. L'inégalité de Bernoulli est démontrée.
*Remarque.* La méthode utilisée montre en fait que l'inégalité est encore vraie pour $x \in [-2; -1]$.

**Récurrence.** Soit $x$ un réel tel que $x \geq -1$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. En développant, $(1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2$. Or $k \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ (c'est un carré), donc $kx^2 \geq 0$ et donc $1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1,\ \mathcal{P}_n$.
   — *Initialisation :* $\mathcal{P}_1$. On a $(1+x)^1 = 1+x$ et $1+1\times x = 1+x$ donc $(1+x)^1 = 1+1\times x$. En particulier, $(1+x)^1 \leq 1+1\times x$, donc $\mathcal{P}_1$ est démontrée.
   — *Hérédité :* $\forall n \geq 1, (\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1})$. Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire $(1+x)^n \geq 1+nx$, et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.
   On remarque que $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$. Par hypothèse, $(1+x)^n \geq (1+nx)$. Or $1+x \geq 0$ car $x \geq -1$, donc on déduit que $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$. Mais d'après la question précédente, $(1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$, donc on obtient finalement l'inégalité voulue $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$.
   — *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, ceci prouve que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$.
3. Quelle méthode préférez-vous ?

# 5 Suite définie par une relation de récurrence

Soit $(w_n)$ la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété $(w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n})$. Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 0,\ \mathcal{P}_n$.

— *Initialisation :* $\mathcal{P}_0$. Par définition, $w_0 = 1$. De plus $2\times 0 + \frac{1}{3^0} = 0 + 1 = 1$. Donc $\mathcal{P}_1$ est prouvée.
— *Hérédité :* $\forall n \geq 0,\ (\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1})$. Soit $n \geq 0$ un entier. Supposons $\mathcal{P}_n$, c'est-à-dire $w_n = 2n + \frac{1}{3^n}$, et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $w_{n+1} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}$. Il suffit de combiner l'hypothèse et la formule de récurrence définissant la suite :

$$w_{n+1} = \frac{w_n + 4n + 6}{3} = \frac{2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6}{3} = \frac{6(n+1) + \frac{1}{3^n}}{3} = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

— *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, ceci prouve que : $\forall n \geq 0,\ \mathcal{P}_n$.

# 6 Décomposition et télescopage

1. Trouver trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

Pour tout $k$ réel, $k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Donc il suffit de chercher $a$,$b$ et $c$ tels que, pour tout $k \geq 2$,

$$k - 5 = ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k-1).$$

Le terme de droite se développe en $(a+b+c)k^2 + (a-c)k + (-b)$, donc il *suffit* en fait d'avoir $a+b+c = 0$, $a - c = 1$ et $(-b) = -5$. Tous les moyens sont bons pour trouver de tels nombres (y compris la divination, à condition de vérifier), par exemple la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a - c = 1 \\ -b = -5 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\iff} \begin{cases} a + c = -5 \\ a - c = 1 \\ -b = -5 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 2c = -6 \\ a - c = 1 \\ -b = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -3 \\ a = -2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

D'après tout ce qui précède, on en déduit que

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{-2}{k-1} + \frac{5}{k} + \frac{-3}{k+1}.$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left( 2\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + 3\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \right) \\ &= 2\sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right] + 3\sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2-1}\right] + 3\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right] && \text{(simplifications télescopiques)} \\ &= \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

*Remarque.* Ce calcul est possible seulement parce que $2+3=5$.

# 7 Une somme dérivée

1. La fonction $f_n$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ réel, $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
2. En en déduit que $S_n = 0q^0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}q = q\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = qf_n'(q)$.
3. Pour tout $x$ réel, si $x=1$ alors $f_n(1) = n+1$, si $x \neq 1$, alors $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
4. La fonction $x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, de dérivée

$$x \mapsto \frac{(0-(n+1)x^n)(1-x) - (1-x^{n+1})(0-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Ceci fournit une expression de $f_n'(x)$ pour tout $x \neq 1$. Par ailleurs, $f_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
5. Conséquence immédiate des questions 2 et 4.
6. Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1,\ S_n = \frac{q(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1)}{(1-q)^2}$.
   - *Initialisation.* Posons $n=1$. Alors $S_n = \sum_{k=1}^{1} kq^k = 1 \cdot q^1 = q$. Par ailleurs, $nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1 = q^2 - 2q + 1 = (1-q)^2$, donc on a bien $S_n = \frac{q(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1)}{(1-q)^2}$ pour $n=1$.
   - *Hérédité.* Soit $n \geq 1$. Supposons que $S_n = \frac{q(nq^{n+1}-(n+1)q^n+1)}{(1-q)^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(1-q)^2} + (n+1)q^{n+1} \\ &= \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1 + (n+1)q^n(1-q)^2)}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1 + (n+1)q^n - 2(n+1)q^{n+1} + (n+1)q^{n+1})}{(1-q)^2} \\ &= \frac{q((n+1)q^{n+2} - (n+2)q^{n+1} + 1)}{(1-q)^2}\end{aligned}$$

     Il s'agit bien de la propriété au rang $n+1$.
   - *Conclusion.* Le principe de récurrence entraîne le résultat voulu.
7. Notons $S$ le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{k} q^k = \sum_{k=0}^{n} \left[q^k \sum_{i=1}^{k} 1\right] = \sum_{k=0}^{n} kq^k$.

   On peut aussi écrire la somme en introduisant une indicatrice puis en intervertissant les deux sommations. Ceci initie un calcul direct qui fait apparaître plusieurs fois des sommes de termes consécutifs de la suite géométrique $(q^i)_{i\in\mathbb{N}}$ :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} q^k \mathbf{1}_{\{i\le k\}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} q^k \mathbf{1}_{\{i\le k\}} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} q^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} q^i \frac{1-q^{n-i+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= = \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n}(q^i - q^{n+1}) \\
&= \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n} q^i - \frac{1}{1-q}\sum_{i=1}^{n} q^{n+1} \\
&= \frac{1}{1-q} q \frac{1-q^n}{1-q} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{q}{(1-q)^2}\left[1-q^n - nq^n(1-q)\right] \\
&= \frac{q}{(1-q)^2}\left[nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1\right].
\end{aligned}
$$

# 8 Produits et sommes doubles

Par définition du produit et propriété des puissances entières, on a :

$$A = \prod_{k=0}^{n} 5^k = 5^0 \times 5^1 \times 5^2 \times \cdots \times 5^n = 5^{0+1+2+\cdots+n}$$

On reconnaît la somme usuelle $0+1+2+\cdots+n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, $A = 5^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

De même, les formules exponentielles-logarithmes montrent que

$$B = \prod_{k=0}^{n} \exp(2^k) = \exp(\sum_{k=0}^{n} 2^k)$$

Avec la somme usuelle $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$, on obtient donc $B = \exp(2^{n+1}-1)$.

$$C = \sum_{1\le i,j\le n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j$$

On calcule la première somme en deux étapes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} ni = n\sum_{i=1}^{n} i = n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Comme les indices de sommation sont des variables muettes, on a par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i,$$

la deuxième égalité résultant d'une interversion de somme double. On a donc finalement $C = n^2(n+1)$.

On peut exprimer $D$ comme une somme double complète (à l'aide d'une indicatrice), puis intervertir les deux sommations :

$$D = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)\mathbf{1}_{\{i\le j\}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(i+j)\mathbf{1}_{\{i\le j\}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i+j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=1}^{j} j\right].$$

On utilise alors les sommes usuelles :

$$D = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right] = \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

Puisque $2^{i+j} = 2^i 2^j$, le calcul de $E$ ne pose pas de problème :

$$E = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i 2^j = \sum_{i=0}^{n}\left[2^i\sum_{j=0}^{n} 2^j\right] = \sum_{i=0}^{n}\left[2^j(2^{n+1}-1)\right] = (2^{n+1}-1)\sum_{i=0}^{n} 2^i = (2^{n+1}-1)^2.$$

Pour calculer $F$, on introduit une indicatrice avant d'intervertir les deux sommations :

$$F = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{i+j} \mathbf{1}_{\{i \leq j\}} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} 2^{i+j} = \sum_{j=0}^{n} \left[ 2^j \sum_{i=0}^{j} 2^i \right] = \sum_{j=0}^{n} 2^j (2^{j+1} - 1).$$

Or $2^j(2^{j+1} - 1) = 2 \times 4^j - 2^j$, donc il reste à évaluer deux sommes géométriques usuelles :

$$F = 2 \sum_{j=0}^{n} 4^j - \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2 \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} - (2^{n+1} - 1) = \frac{2}{3} 4^{n+1} - 2^{n+1} + \frac{1}{3}.$$

# 9 Bonus

Malgré tout le soin que j'ai pris à rédiger et à relire ce document, il contient probablement encore de nombreuses coquilles (fautes de frappes ou d'inattention). Celui ou celle qui en trouvera le plus bénéficiera d'un bonus d'un point au prochain devoir surveillé. La chasse est ouverte !