Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 1

E1A 2016-2017

à rendre le 3 novembre

1 Substitution de variables

1. Soit u une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. Soit x un réel. Donner la définition des *nombres* suivants (en précisant les conditions d'existence sur x, c'est à dire le domaine de définition) :

$$\begin{array}{cccc} |x|, & |-x|, & |\ln(x)|, & |u(x)|, \\ \lfloor x \rfloor, & \lfloor -x \rfloor, & \lfloor \ln(x) \rfloor, & \lfloor u(x) \rfloor, \\ \sqrt{x}, & \sqrt{-x}, & \sqrt{\ln(x)}, & \sqrt{u(x)}. \end{array}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(-1)^n\, n^2}{3n + 2^n}$.
   Soit k un entier naturel. Donner une expression simplifiée des *nombres* suivants :

$$\begin{array}{cccccc} u_{k+1}, & u_{k+2}, & u_{2k}, & u_{2k-1}, & u_{k^2}, & u_{2^k}, \\ \sum\limits_{i=0}^{2} u_i, & \sum\limits_{i=1}^{2} u_{2i}, & \sum\limits_{i=3}^{4} u_{i-1}, & \sum\limits_{i=1}^{2016} u_k, & \sum\limits_{i=k+1}^{k+1} u_i, & \sum\limits_{i=k}^{k+1} u_{(i-k)^2}. \end{array}$$

2 Valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations d'inconnue x suivantes :

a. $|x + 1| = 7$,
b. $|x + 1| + |x + 2| = 1$,
c. $|x + 1| + |2x + 3| + |4x + 5| = 7$,
d. $|x^2 + x - 7| + |x| < 5$.
e. $\sqrt{|x^2 - x + 6|} = x + 1$.

3 Étude de fonctions

Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}, \qquad g : x \mapsto \left|\frac{1}{x} - x\right|, \qquad h : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

4 Inégalité de Bernoulli

Attention à la place du i, *Bernoulli n'est pas une nouille !*

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières différentes que pour tout réel $x \geq -1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Étude de fonction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction polynomiale $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (1+x)^n - 1 - nx.$$

1. Calculer $f_n(0)$ et $f_n(-2)$ selon la parité de n.
2. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ selon la parité de n.
3. Montrer que pour tout réel $x \geq -1$, $f_n(x) \geq 0$.
4. Conclure.

Récurrence. Soit x un réel tel que $x \geq -1$.

1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1+kx)(1+x) \geq 1 + (k+1)x$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Quelle méthode préférez-vous ?

5 Suite définie par une relation de récurrence

Soit (w_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{3}(w_n + 4n + 6) \end{cases}$$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

6 Décomposition et télescopage

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}.$$

7 Une somme dérivée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$. Le but de cet exercice est de calculer la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^k.$$

On définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.
2. En déduire une relation entre S_n et $f_n'(q)$.
3. En reconnaissant une somme classique, simplifier l'expression de $f_n(x)$.
4. Calculer f_n' à l'aide du résultat de la question précédente.

5. En déduire que
$$S_n = \frac{q}{(q-1)^2}\left(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1\right).$$
6. Redémontrer ce résultat par récurrence.
7. Retrouver à nouveau ce résultat en calculant de deux manières différentes la somme double
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{k} q^k.$$

8 Produits et sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits suivants :
$$A = \prod_{k=0}^{n} 5^k, \qquad B = \prod_{k=0}^{n} \exp(2^k).$$
Calculer les sommes doubles suivantes :
$$C = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j), \quad D = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j), \quad E = \sum_{0 \leq i,j \leq n} 2^{i+j}, \quad F = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j}.$$