Correction du DS 1

E1A

24 septembre 2016

Exercice 1 (9 points)

1. $(2x-1)(1-x)$
2. $4x^2-12x+9$
3. $(2x-1)(2x+23)$
4. x^2-x-6
5. $\frac{24}{5}$
6. $2\sqrt{13}$
7. $(\sqrt{2}x-1)(6\sqrt{3}+4)$
8. L'expression est définie si et seulement si $x \in [-4;4]$.
9. $\sqrt{\frac{5}{13}}$.

Exercice 2 (11 points)

1. Oui. Il suffit de prendre X^4+2X^3.
2. Non. Supposons qu'il existe un tel polynôme P. Alors $c_3(P)=0$ puisque $3 \geq \deg(P)$. Or $c_3(P)=4$, donc il y a une contradiction.
3. Non. Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients.
4. Oui. Posons $P=X^3$ et $Q=X^3$. Alors $\deg(P)=\deg(Q)=3$ et $P\times Q=X^6$ qui est bien de degré 6.
5. Oui. Posons $P=X^6+X^3$ et $Q=-X^6$. Alors $\deg(P)=\deg(Q)=6$ et $\deg(P+Q)=\deg(X^3)=3$
6. Oui. Posons $P=X^4+1$. On a bien $\deg(P)=4$. Montrons que P n'admet aucune racine, en supposant qu'au contraire qu'on peut trouver a réel tel que $P(a)=0$. Alors $a^4=-1$. Or a^4 est le carré de a^2, donc c'est un réel positif. Il y a une contradiction.
7. Oui. Posons $P=(X-1)^4$. Alors pour tout x réel, $P(x)=0$ si et seulement si $x-1=0$ (d'après la règle du produit nul). Le réel 1 est donc l'unique racine de P.
8. Oui. Posons $P=(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. On montre comme précédemment que les racines de P sont 1,2,3 et 4.
9. Non. D'après le cours, un polynôme de degré 4 admet au maximum 4 racines distinctes.
10. Oui. Il suffit de prendre le polynôme nul.

Exercice 3 (12 points)

Équation (1)

Domaine : pour que $\sqrt{\frac{x}{6}+6}$ soit défini, il faut que $\frac{x}{6}+6 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -36$. Le domaine de définition est donc $[-36;+\infty[$.

Soit x appartenant à ce domaine.

Analyse : supposons que x est solution de l'équation.

Alors $(x+1)^2=(\sqrt{\frac{x}{6}+6})^2$. Après simplifications, on voit donc que x est racine du polynôme $6X^2+11X-30=0$. Son discriminant vaut $841=29^2$ (positif) donc ses racines sont $-\frac{10}{3}$ et $\frac{3}{2}$. On en déduit que $x \in \{-\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\}$.

Synthèse :

- Posons $x = -\frac{10}{3}$. Alors x est bien dans le domaine. Cependant, $x+1 = -\frac{7}{3}$, qui est strictement négatif, donc $x+1 \neq \sqrt{\frac{x}{6}+6}$. Ainsi, $-\frac{10}{3}$ n'est pas solution.
- Posons $x = \frac{3}{2}$. Alors x est bien dans le domaine et $\sqrt{\frac{x}{6}+6} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = x+1$, donc $\frac{3}{2}$ est bien solution de l'équation.

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\{\frac{3}{2}\}$.

Équation (2)

Domaine : Pour que $\frac{3}{y-1}$ soit défini, il faut que $y-1$ soit non nul. Pour que $\frac{2}{6-\frac{3}{y-1}}$ soit défini, il faut que $6-\frac{3}{y-1}$ soit non nul. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\}$.

Soit y dans ce domaine. Après simplifications, on voit que y est solution de l'équation si et seulement y est racine de $6X^2 - 13X + 7$. Les racines de ce polynôme sont 1 et $\frac{7}{6}$. Or $y \neq 1$, donc y est solution de l'équation si et seulement si $y = \frac{7}{6}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\{\frac{7}{6}\}$.

Équation (3)

Domaine : Pour que $\sqrt{z+1}$, $\sqrt{z-3}$ et $\sqrt{3z-1}$ soient définis, il faut que $z+1 \geq 0$, $z-3 \geq 0$ et $3z-1 \geq 0$. Le domaine de définition est donc $[3; +\infty[$.

Soit z dans ce domaine. Puisqu'une racine carrée est toujours positive, z est solution de l'équation si et seulement si $(\sqrt{3z-1})^2 = (\sqrt{z+1}+\sqrt{z-3})^2$, c'est-à-dire si et seulement si $z+1 = 2\sqrt{(z+1)(z-3)}$. Puisque $z+1 \geq 3+1 \geq 0$, on voit alors que z est solution si et seulement si $(z+1)^2 = \left(2\sqrt{(z+1)(z-3)}\right)^2$, c'est-à-dire si et seulement si z est racine du polynôme $3X^2 - 10X - 13$, c'est à dire si et seulement si $z = -1$ ou $z = \frac{13}{3}$. Mais -1 n'est pas dans le domaine. L'ensemble des solutions est donc finalement $\{\frac{13}{3}\}$.

Exercice 4 (10 points)

1. Soit n un entier. Posons $a = n$ et $b = 1$. Alors $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, et $n = \frac{n}{1} = \frac{a}{b}$. Donc n est rationnel.
2. Soit x un réel non nul. Supposons que x est rationnel. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$. Posons a et b de tels entiers. L'entier a est non nul car sinon x serait nul. De plus $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$. En posant $a' = b$ et $b' = a$, on a donc $a' \in \mathbb{Z}$, $b' \in \mathbb{Z}^*$ et $\frac{1}{x} = \frac{a'}{b'}$. Ceci montre que $\frac{1}{x}$ est rationnel.
3. Puisque x et y sont rationnels, on peut trouver des entiers a_1, b_1, a_2, b_2 des entiers avec $b_1 \neq 0$ et $b_2 \neq 0$ tels que $x = \frac{a_1}{b_1}$ et $y = \frac{a_2}{b_2}$.
   - Alors $x \times y = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$. Or $a_1 a_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 b_2 \in \mathbb{Z}^*$, donc $x \times y$ est rationnel. Ceci prouve (a).
   - De même, $x + y = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$ avec $a_1 b_2 + a_2 b_1 \in \mathbb{Z}$ et $b_1 b_2 \in \mathbb{Z}^*$, donc $x + y$ est un rationnel. Ceci prouve (b).
4. Procédons par l'asburde. Supposons donc qu'il existe x rationnel et y irrationnel tels que $x+y$ est rationnel. Alors x est rationnel et (-1) est rationnel (car il est entier), donc $(-1) \times x = -x$ est rationnel d'après **3.(a)**. De plus, $x+y$ est rationnel donc $(x+y)+(-x) = y$ est rationnel d'après **3.(b)**. Or on a supposé y irrationnel donc il y a une contradiction.
5. Non. Posons $a = \sqrt{24 - 9\sqrt{2}}$ et supposons que contraire a est un rationnel. Alors $a \times a = 24 - 9\sqrt{2}$ est rationnel d'après **3.(a)**. De plus -24 est rationnel (car c'est un entier) donc $-9\sqrt{2}$ est rationnel d'après **3.(b)**. En multipliant par $-\frac{1}{9}$ qui est rationnel, on en déduit finalement (d'après **3.(a)** à nouveau) que $\sqrt{2}$ est rationnel. Ceci est en contradiction avec le rappel, donc a n'est pas rationnel.
6. Non. Il suffit de considérer le contre-exemple $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$ pour lequel $x \times y = 2$ est bien rationnel.
7. Non. Il suffit de considérer le contre-exemple $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$ pour lequel $x + y = 0$ est bien rationnel.

Problème

A. Préliminaires (5 points)

1. On développe : $(X-u)(X-v) = X^2 - (u+v)X + uv = X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2$. Le coefficient de degré 0 vaut σ_2, le coefficient de degré 1 vaut $-\sigma_1$, le coefficient de degré 2 vaut 1, et tous les autres sont nuls.
2. On reconnait le polynôme de la question précédente, dont les racines sont u et v.
3. D'après les deux questions précédentes, les racines du polynôme $X^2 - 9X + 19$ vérifient ces deux conditions. Son discriminant vaut 5, donc il suffit de prendre les deux racines
$$x = \frac{9-\sqrt{5}}{2}, \qquad y = \frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$
4. Procédons par double implication. Supposons d'abord qu'il existe x, y tels que $x+y=a$ et $xy=b$. Alors $X^2 - aX + b$ admet x et y comme racines (d'après **2**) donc son discriminant est positif, c'est à dire $a^2 - 4b \geq 0$. Donc $a^2 \geq 4b$.

   Réciproquement, supposons que $a^2 \geq 4b$. Alors le discriminant de $X^2 - aX + b$ est positif donc il existe x et y réels (éventuellement $x = y$) tels que $X^2 - aX + b = (X-x)(X-y)$. En identifiant les coefficients comme à la question **1**, on voit que ces deux nombres vérifient $x+y=a$ et $xy=b$.
5. On calcule : $9^2 - 4 \times 24 = -15$. Ce nombre est strictement négatif donc il n'existe pas de réels x et y tels que $x+y=9$ et $xy=24$ d'après la question précédente.

B. Méthode de Cardan (7 points)

1. En développant le membre de droite, on obtient $aX^3 + 3arX^2 + (3ar^2 - 3ap)X + (-3apr - aq)$. Pour avoir l'égalité, il suffit donc d'avoir $3ar = b$, $3ar^2 - 3ap = c$ et $-3apr - aq = d$, ce qui est vérifié en prenant
$$r = \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{3ar^2 - c}{3a}, \quad q = \frac{-3apr - d}{a}.$$
2. Soit x réel. Puisque $a \neq 0$, l'égalité des polynômes de la question **1** montre que $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ si et seulement si $(x+r)^3 - 3p(x+r) - q = 0$ (d'après la règle du produit nul). Ainsi, x est solution si et seulement si $P(x+r) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x+r$ est racine de P.
3. Il suffit de développer les deux membres.
4. Supposons que $u^3 + v^3 = q$ et $uv = p$. Alors $P(u+v) = 0$ d'après la question précédente, donc $u+v$ est racine de P d'après la question **2.**
5. En posant $x = u^3$ et $y = v^3$, on voit que la condition équivaut à $x+y=q$ et $xy=p^3$. D'après ce qu'a montré en **A.5**, de tels x et y existent si et seulement si $q^2 - 4p^3 \geq 0$.

C. Application de la méthode (6 points)

1. Il suffit de prendre $u=5$ et $v=2$.
2. On a $u^3 + v^3 = 133$ et $uv = 10$ donc $u+v$ est racine de $X^3 - 3 \times 10X + 133$ d'après **B.4**. Or $u+v=7$.
3. Puisque 7 est racine, on peut factoriser P par $X-7$. On obtient $P = (X-7)(X^2+7X+19)$. Or le discriminant de $X^2+7X+19$ est strictement négatif, donc pour tout x réel, $x^2+7x+19 \neq 0$. On en déduit que 7 est la seule racine de P.
4. On peut appliquer les formules obtenues en **B.1** qui montrent que pour tout x réel,
$$x^3 - 12x^2 + 18x - 77 = P(x-4).$$
   On en déduit que l'équation $x^2 + 18x = 12x^2 + 77$ équivaut à $P(x-4) = 0$, et donc à $x-4=7$ d'après la question précédente. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\{11\}$.