Rapport d'épreuve

Concours blanc E1A–E1B

4 janvier 2017

Le sujet était composé de trois exercices indépendants, de difficulté croissante, et d'un problème en deux parties. Aucune originalité particulière dans les questions, beaucoup de choses vues et revues, particulièrement dans l'exercice 1. Il est vivement conseillé de reprendre intégralement le sujet (sauf peut-être la partie 2 du problème) à la lumière de ce rapport et du corrigé détaillé.

Exercice 1

Le premier exercice était composé de cinq questions indépendantes portant sur des points de méthodes de base du cours que vous devez absolument maîtriser à l'issue de cette première période.

1. Question très bien traitée dans l'ensemble. Certaines copies s'arrêtent malheureusement à $(X-1)(X^2-2016X-2017)$ alors qu'on pouvait encore factoriser le polynôme du second degré.
2. Il fallait appliquer soigneusement les règles de calcul avec les sommes et les les coefficients binomiaux pour se ramener à la formule du binôme de Newton. Une erreur tristement courante consistait à décomposer la somme comme un produit :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}\right),$$

   ce qui correspond à l'erreur de distributivité $(a+c)(b+d)=ab+cd$, niveau collège. Autre erreur très grave, sortir de la somme l'indice de sommation :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1} = k\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}.$$

   Ceci conduit à un résultat dépendant à la fois de n et de k, ce qui n'a aucun sens et devait vous alerter !
3. La méthode est comprise par la grande majorité, ce qui fait que la question est, logiquement, très bien réussie. Mais attention aux erreurs de calcul !
4. Des résultats étonnamment faibles sur cette question facile. Il ne fallait pas oublier la définition des puissances réelles $2^x = e^{x\ln(2)}$. Beaucoup de copies se content d'affirmer, souvent à tort, voire de bluffer, sans rien démontrer.

5. a. Beaucoup de confusion entre les variables et le nom de la fonction. Erreur récurrente également sur l'opérateur « deux points », qui ne désigne pas du tout une division.
   b. Certains voient un problème dans le fait que $2 < 5$, montrant qu'il n'ont pas compris la structure conditionnelle.
   c. Faites attention à la syntaxe de `input` et n'oubliez pas de stocker la valeur obtenue. Hors-sujet si vous ne faites pas appel à la fonction `choixCalc` définie précédemment.

Exercice 2

Le second exercice était un exercice classique sur les suites. Il contenait sept questions, portant sur des points méthodes du cours que vous devez absolument maîtriser à l'issue de cette première période.

1. Question très largement non traitée, ce qui est très grave (les *ECE1B* sont concernés), car c'est une question déjà vue et revue : en cours, en TD et dans le quizz d'avant Noël.
2. Beaucoup n'ont pas reconnu le point méthode du cours : la suite (u_n) étant définie comme un quotient/produit, il fallait immédiatement penser à considérer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 (et non à 0 !)
3. La plupart des copies ont mentionné le théorème de la limite monotone, ce qui rapportait la plupart des points. Pour avoir la totalité des points, il fallait être précis lorsque vous prétendiez que la suite (u_n) était minorée : on précise TOUJOURS la constante de minoration/majoration (qui doit absolument être indépendante de n). Il n'y avait pas besoin de chercher bien longtemps la constante de minoration ; certains ont judicieusement remarqué que la suite (u_n) était positive.
4. a. Question en partie bien traitée dans la plupart des copies. Ne pas connaître l'identité $(a+b)^3$ est une grave erreur (les concernés, vous en avez été très fortement sanctionnés). Une originalité à signaler : certaines copies ont tenté une preuve par récurrence sur x, ce qui a laissé le correcteur dubitatif : où est donc l'entier naturel n dans cette question ?
   b. Échec quasi-complet sur cette question. Même remarque qu'à la question 2. Il fallait penser à considérer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et le comparer à 1. Comme par magie, on tombe sur une inégalité qui ressemble fortement à celle de la question 4.*a*...
   c. Une fois encore, mentionner le théorème de la limite monotone rapportait la quasi-totalité des points.
   d. Question non traitée dans la plupart des copies.

Exercice 3

Il s'agissait d'un exercice très classique mélangeant les probabilités et les coefficients binomiaux.

1. a. **L'univers Ω est un ensemble**, jamais un nombre ! Chaque élément de Ω correspond à une *description complète* du résultat de l'expérience aléatoire, ici un tirage de n boules. On ne pouvait donc pas se contenter de prendre comme Ω l'ensemble des boules. De même, dans le cas d'un univers fini, $\mathbb{P}$ est une **application** définie sur **l'ensemble**

$\mathcal{P}(\Omega)$. Ni l'un ni l'autre ne sont des nombres. Toutes ces confusions consituent de très graves erreurs de compréhension.

b. On attend de vous des arguments précis et concis, évitez à tout prix le blabla vague et verbeux.

Au rayon des erreurs graves, dire que $\binom{a+b}{n}$ est :
— une probabilité,
— un ensemble,
— le nombre de boules.

c. Certains oublient qu'il s'agit d'une épreuve de mathématiques et se contentent naïvement de recopier sans justification le résultat qui est donné par l'énoncé.

2. a. Beaucoup de tentatives de bluff pour cette question qui demandait simplement de *compléter une factorielle*, comme dans l'exercice 2.

   b. Question bien réussie, mais attention cependant à ne pas écrire $A_k(x) = \frac{x!}{(x-k)!}$ car x est ici un réel quelconque, pas nécessairement un entier.

   c. Il fallait s'appuyer avec un peu d'astuce sur la question précédente.

   d. Question très rentable pour ceux qui s'y sont attaqué. Il s'agissait de mimer la démonstration par récurrence de la formule du binôme de Newton.

3. a. Vous remarquez bien qu'il s'agit d'appliquer la formule de Vandermonde avec $a = n$ et $b = n$, mais vous donnez précipitamment la valeur $\binom{2n}{2k}$ qui n'a aucun sens puisqu'elle dépend encore de l'indice de sommation k.

   b. Cette question nécessitait de prendre des inititives. Elle a été rarement traitée, et jamais réussie.

Problème

Ce problème est directement tiré du sujet HEC, 2012, option littéraire. Il a très peu été retouché et vous donne donc une idée de ce qui vous attend l'an prochain. La première partie était très abordable ; beaucoup de questions très faciles étaient disséminées un peu au fil de la partie. La seconde partie était plus délicate.

Partie 1.

1. Question niveau lycée. Traitée dans la plupart des copies. Cette question était discriminante : étant donné qu'il s'agit de la première question du problème, il fallait y porter un soin tout particulier. Ne pas justifier le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction a été sanctionné. Une rédaction bâclée et un tableau de variations incomplet (non calcul des valeurs de $f(0)$, $f(\frac{1}{2}$, $f(1))$ coutaient très cher. Quant aux copies qui n'ont pas réussi à déterminer correctement la dérivée de la fonction f, inutile de préciser leur note à cette question.

2. a. Beaucoup ont réussi à prouver la décroissance de la suite (x_n). Personne n'a su démontrer rigoureusement la minoration de la suite. Ceci était délicat car l'énoncé ne vous donnait aucune indication. Il fallait de vous-même penser à montrer que la suite (x_n) vérifiait pour tout entier naturel n, $\quad x_n \in [0, 1]$.

b. Grave confusion dans cette question entre la monotonie de la fonction et celle de la suite (x_n). Il n'y a a priori aucun lien entre la monotonie de la fonction f et celle de la suite ! Il faut être très soigneux et commencer par écrire une phrase du type : « *on reconnait une suite récurrence de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f la fonction de l'énoncé $f(x) = x - x^2$* ». Ensuite, il s'agissait d'utiliser les propriétés classiques vues en cours et en TD (mentionner par exemple que la fonction f est continue car polynomiale). Nous renvoyons le lecteur au corrigé pour apprendre dès à présent à rédiger ce genre de question TRÈS classique.

3. a. Rares sont ceux qui ont pensé à raisonner par récurrence sur n... Et ceux qui y ont pensé n'ont pas réussi l'étape d'hérédité. Signalons des efforts de rédaction sur la structure du raisonnement par récurrence ; ceux-ci ont été récompensés !

   b. Le théorème d'encadrement a été mentionné dans beaucoup de copies. La récompense a été immédiate.

4. a. Échec quasi-complet de cette question car les diverses version du calcul de $v_{n+1} - v_n$ ne vous permettaient pas de conclure. Toute tentative a cependant été récompensée.

   b. Question non traitée dans la plupart des copies.

   c. Certaines copies ont eu la bonne idée de passer à la limite dans l'inégalité et d'obtenir ainsi un encadrement de la limite ℓ de la suite (v_n). En revanche, toutes les copies qui ont su aller jusqu'ici ont bluffé en affirmant : $\ell > 0$ car $v_n > 0$. Grave erreur : il est bien connu que par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges. Il fallait donc être plus soigneux pour obtenir l'inégalité stricte. Nous renvoyons le lecteur au corrigé ; c'est un argument déjà rencontré à plusieurs reprises dans le cours/TD.

5. Question non traitée et/ou non réussie. Calculs faux en général.

6. Question très peu traitée. Seules quelques bonnes copies ont deviné qu'il s'agissait d'un simple passage à la limite. Encore fallait-il avoir réussi la question précédente. Mais toute remarque allant en ce sens a été récompensée.

   a. Question non traitée et/ou non réussie.

   b. Question non traitée et/ou non réussie.

   c. Quasiment aucune copie n'a su démontrer cette inégalité, pourtant déjà rencontrée dans un précédent DST. C'est inadmissible. C'est une question tellement classique que vous devriez l'apprendre par coeur. Une copie a eu la belle initiative de reconnaître l'inégalité de convexité du cours : $\forall x > 0, \quad \ln(1+x) \leqslant x$, appliquée ici à $\frac{1}{x}$. Félicitations à cette élève !
   Signalons aussi une horreur rencontrée dans beaucoup trop de copies malheureusement : $e^{a-b} = e^a - e^b$. Sachez qu'une telle horreur frappe l'esprit du correcteur et dévalorise entièrement votre copie.

   Concernant la partie "En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{b}{n} \geq b\ln(p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:"
   Certaines copies ont réussi cette question avec brio, en reconnaissant une somme télescopique. Signalons que certains ont eu l'intelligence d'admettre la première partie de la question, afin de répondre à celle-ci. C'est une très bonne initiative, récompensée évidemment !

   d. Dans la grande majorité des copies : question non traitée. Raisonnement loufoque pour les autres.

7. Question non traitée.

Partie 2.

Cette partie n'a quasiment pas été abordée : seule une poignée de copies a osé s'y attaquer. Toute tentative (et certaines étaient vraiment bien vues !) a été valorisée. Concernant la question $7.a$ et $7.b$, les mots comme *"inégalité triangulaire"*, *"sommation par paquet"* ont fait grand plaisir au correcteur. Mais peu de copies ont accordé cette joie au correcteur.

Chers élèves, apprenez une chose : *"l'honnêteté paie toujours, le bluff, jamais"*. Les copies qui affirment des résultats sans une once de démonstration se sont attirées les foudres du correcteur et ont payé très cher leur malhonnêteté intellectuelle. En revanche, les copies qui ont admis modestement des résultats pour poursuivre, se sont attirées la sympathie et la clémence du correcteur.
A bon entendeur, salut !