Concours blanc n° 1

Mercredi 4 janvier 2017

Exercice 1

1. Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2017x^2 - x + 2017$.

Démonstration.

- 1 est racine évidente de P : $P(1) = 1^3 - 2017\,(1)^2 - 1 + 2017 = 1 - 2017 - 1 + 2017 = 0$
  Ainsi, d'après le théorème de factorisation d'un polynôme par une de ses racines, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)Q(x)$.
- -1 est racine évidente de P : $P(-1) = (-1)^3 - 2017\,(-1)^2 + 1 + 2017 = -1 - 2017 + 1 + 2017 = 0$
  Or, $P(-1) = (-1-1)\,Q(-1) = -2\,Q(-1)$. On en déduit que $Q(-1) = 0$.
  Ainsi, il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = (x-(-1))R(x)$.

R étant de degré 1, il s'écrit sous la forme : $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = ax + b$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(x+1)(ax+b)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & (x^2-1)(ax+b) \\ & = & ax^3 + bx^2 - ax - b \end{array}$$

Par identification, on a $a = 1$ et $b = -2017$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-1)(x+1)(x-2017)}$$

□

2. Simplifier la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1}$ (où n est un entier naturel).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, rappelons que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1} & = & \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^{k-1} \ = \ n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}2^{k-1} \\ & = & n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}2^{k} \ = \ n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^{(n-1)-k}\,2^{k} \\ & = & n\,(1+2)^{n-1} \ = \ n\,3^{n-1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^{k-1} = n\, 3^{n-1}}$$

□

3. Résoudre l'équation $|x^2 + x - 2| + |x+1| = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration.
On note $q(x)$ la quantité $|x^2 + x - 2| + |x+1|$.
Notons tout d'abord que : $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ (1 et -2 sont des racines évidentes).
Afin de pouvoir se débarrasser des valeurs absolues, on étudie le signe des quantités $x^2 + x - 2$, $x+1$. Regroupons ces résultats dans un tableau.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
Signe de x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Valeur de $\lvert x^2+x-2\rvert$		x^2+x-2	0	$-x^2-x+2$		$-x^2-x+2$	0	x^2+x-2	
Signe de $x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Valeur de $\lvert x+1\rvert$		$-x-1$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
Valeur de $q(x)$		x^2-3		$-x^2-2x+1$		$-x^2+3$		x^2+2x-1	

- Si $x \in]-\infty, -2]$, on a : $q(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$
  Or $-\sqrt{5} \in]-\infty, -2]$ et $\sqrt{5} \notin]-\infty, -2]$.
  On en déduit que la seule solution de l'équation sur $]-\infty, -2]$ est $x_1 = -\sqrt{5}$.
- Si $x \in]-2, -1]$, on a : $q(x) = 2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$
  On en déduit que la seule solution de l'équation sur $]-2, -1]$ est $x_2 = -1$.
- Si $x \in]-1, 1]$, on a : $q(x) = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 3 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$
  On en déduit que la seule solution de l'équation sur $]-1, 1]$ est $x_3 = 1$.
- Si $x \in]1, +\infty[$, on a : $q(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$
  On en déduit que l'équation n'admet pas de solution sur $]1, +\infty]$.

$$\boxed{\text{L'équation } q(x) = 2 \text{ admet } \{-\sqrt{5}, -1, 1\} \text{ comme ensemble solution.}}$$

□

4. On considère l'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2^x \end{array}$.
L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Démonstration.
On rappelle tout d'abord que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x \ln 2}$.
• Montrons que f est injective :
Soient x et y réels tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
Par hypothèse $f(x) = f(y)$, donc $e^{x\ln 2} = e^{y \ln 2}$, puis par composition avec la fonction ln, on en déduit que $x \ln 2 = y \ln 2$ et donc que $x = y$.
• Montrons que f n'est pas surjective :
Soit $y = -2$. Comme une exponentielle est toujours positive, il n'existe pas de réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2$

• Il est alors clair que f n'est pas bijective car non surjective

.

□

5. On tape les commandes suivantes dans Scinotes :

```
function T = choixCalc(n,i)
   aux = (1:n)
   if i==-1 then
       T = prod(aux)
   elseif i==1 then
       T = sum(aux)
   end
endfunction
```

a. Décrire précisément les différents éléments de ce code (nom de la fonction, des arguments d'entrée, de sortie, calcul effectué).

Démonstration.

- Cette fonction se nomme `choixCalc`.
- Elle prend deux arguments en entrée : `n` et `i`.
- Si `i` vaut `-1`, elle calcule `n!`. Si `i` vaut `1`, elle calcule $\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{n}} k$.
- Ce calcul est stocké dans `T`, argument de sortie de cette fonction. □

b. Que se passe-t-il si l'on effectue l'appel : `choixCalc(5,2)` ? Comment peut-on modifier le code de la fonction `choixCalc` pour éviter cette situation ?

Démonstration.
Si on réalise l'appel `choixCalc(5,2)`, aucune condition de la structure conditionnelle n'est vérifiée. Ainsi, aucune branche n'est exécutée et la variable de sortie `T` n'est affectée à aucun calcul, ce qui aura pour conséquence l'affichage d'un message d'erreur du type : `Variable non définie : T`.

L'appel `choixCalc(5,2)` produit l'affichage d'un message d'erreur.

Le problème provient du fait que le filtrage effectué dans la structure conditionnelle n'est pas exhaustif. On peut le régler soit en remplaçant le `elseif i==1` par le mot clé `else` (solution `choixCalc1`), soit en ajoutant une branche portée par ce mot clé (solution `choixCalc2`).

```
function T = choixCalc1(n,i)
   aux = (1:n)
   if i==-1 then
       T = prod(aux)
   else
       T = sum(aux)
   end
endfunction
```

```
function T = choixCalc2(n,i)
   aux = (1:n)
   if i==-1 then
       T = prod(aux)
   elseif i==1 then
       T = sum(aux)
   else
       T = disp("Erreur! Le deuxième
argument doit prendre la valeur 1 ou -1")
   end
endfunction
```

□

c. Écrire un programme :

- qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier n au clavier,
- et qui affiche la valeur du calcul : $\dfrac{\mathtt{n}!}{\sum\limits_{k=1}^{\mathtt{n}} k}$

Pour ce faire, on devra effectuer des appels à la fonction `choixCalc`.

Démonstration.

```
n = input("Entrer la valeur d'un entier n : ")
u = choixCalc(n,-1)/choixCalc(n,1)
disp(u)
```

□

Exercice 2

1. On peut écrire la suite (u_n) sous la forme :

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{\Big(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)\Big)^2}.$$

On reconnaît alors : $u_n = \dfrac{(2n)!}{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}$.

Par ailleurs, il est bien connu que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n\, n!$, ce qui donne le résultat attendu.

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) revient à comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, après avoir noté que la suite (u_n) était clairement strictement positive (car quotient de termes strictement positifs).

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2} \times \frac{\left(2^n\, n!\right)^2}{(2n)!}\\ &= (2n+2)(2n+1) \times \left(\frac{2^n\, n!}{2^{n+1}(n+1)!}\right)^2\\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que pour tout entier naturel n, il est clair que $2n+1 < 2n+2$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée par 0 (car suite à termes positifs). Ainsi, d'après *le théorème de convergence monotone*,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers un certain réel } \alpha \in \mathbb{R}.}$$

4. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = (n+1)u_n^2$.

a. On souhaite montrer que pour tout réel x positif,

$$(x+2)(2x+1)^2 \leqslant 4(x+1)^3.$$

Ceci résulte d'un simple développement de l'identité ci-dessus :

$$\begin{aligned}(x+2)(2x+1)^2 \leqslant 4(x+1)^3 &\Leftrightarrow (x+2)(4x^2+4x+1) \leqslant 4(x^3+3x^2+3x+1)\\ &\Leftrightarrow 4x^3+12x^2+9x+2 \leqslant 4x^3+12x^2+12x+4\\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant 3x+2\end{aligned}$$

Comme la dernière équivalence est toujours vérifiée puisque par hypothèse x est un réel positif, on en déduit que l'assertion de l'énoncé est vérifiée.

b. A nouveau, étudier la monotonie de la suite (v_n) revient à comparer le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1, après avoir noté que la suite (v_n) était clairement strictement positive (car produit de termes strictement positifs).
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+2)u_{n+1}^2}{(n+1)u_n^2}\\ &= \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2\\ &= \frac{n+2}{n+1} \times \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2, \quad \textit{d'après le calcul de la question 2}\\ &= \frac{(n+2)(2n+1)^2}{4(n+1)^3}\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la question précédente :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

c. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 (car positive), donc d'après *le théorème de convergence monotone*,

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers un certain réel } \beta \in \mathbb{R}.}$$

d. Par hypothèse, la suite (v_n) est définie par $u_n^2 = v_n \times \dfrac{1}{n+1}\cdot$. Passons à la limite dans cette égalité (et on en a le droit puisqu'on a prouvé précédemment que les suites (u_n) et (v_n) convergeaient toutes les deux).
On obtient alors par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = 0$ et donc par composition avec la fonction racine carrée, $\lim\limits_{n\to+\infty} | u_n |= 0$.
Comme la suite (u_n) est positive, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc par *unicité de la limite*

$$\boxed{\alpha = 0}$$

.

Exercice 3

1. a. Par *simultanéité*, le tirage se fait sans remise et sans tenir compte de l'ordre. Il est donc déterminé par le sous-ensemble de n boules obtenu. On peut donc choisir comme univers Ω l'ensemble des parties de cardinal n de l'ensemble des boules. Cet univers étant fini, l'ensemble des évènements considérés est simplement l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, les conditions de l'expérience (dans une urne) permettent de supposer que les tirages sont *équiprobables.* On munira donc Ω de l'application *probabilité uniforme.*

b. Notons R_k l'évènement « obtenir k boules rouges ». Il y a en tout $a+b$ boules dans l'urne, donc le cardinal de Ω est $\binom{a+b}{n}$. De plus, l'évènement R_k s'identifie au produit cartésien de :

— l'ensemble des parties de cardinal k de l'ensemble des a boules rouges, de cardinal $\binom{a}{k}$,

— et l'ensemble des parties de cardinal $n-k$ de l'ensemble des b boules bleues, de cardinal $\binom{b}{n-k}$.

Le cardinal de R_k est le produit. Par définition de la probabilité uniforme, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}(R_k) = \frac{\text{card}(R_k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}}$$

c. En reprenant les notations précédentes, les évènements $(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ forment un système complet d'évènements. En effet, ils recouvrent l'univers car tout tirage est constitué d'un nombre de boules rouges compris entre 0 et a, et ils sont deux à deux incompatibles car on ne peut pas avoir à la fois k boules rouges et ℓ boules rouges lorsque $k \neq \ell$. Par propriété d'additivité des systèmes complets d'évènements,

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

La formule de Vandermonde découle alors de la linéarité du symbole Σ :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} = \binom{a+b}{n} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(R_k) = \boxed{\binom{a+b}{n}}$$

2. a. Soient k et p des entiers naturels tels que $k \leqslant p$.

$$\frac{A_k(p)}{k!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)\times(p-k)!}{k!\times(p-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{p}{k}.$$

b. Soit k un entier naturel. On a $A_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^{k}(x-i) = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)\right)(x-k) = A_k(x)(x-k)$.

c. Soient n et k des entiers naturels tels que $k \leqslant n$. En écrivant $x+y-n = (x-k)+(y-n+k)$ et en développant le produit, on obtient

$$(x+y-n)A_k(x)A_{n-k}(y) = (x-k)A_k(x)A_{n-k}(y) + (y-(n-k))A_k(x)A_{n-k}(y).$$

D'après ***2.b.***, on sait que $(x-k)A_k(x) = A_{k+1}(x)$ et de même $(y-(n-k))A_{n-k}(y) = A_{n-k+1}(y)$, d'où

$$\boxed{(x+y-n)A_k(x)A_{n-k}(y) = A_{k+1}(x)A_{n-k}(y) + A_k(x)A_{n-k+1}(y)}.$$

d. Démontrons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y)$ » par récurrence.

Initialisation. On a $A_0(x+y) = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}A_k(x)A_{n-k}(y) = \binom{0}{0}A_0(x)A_0(y) = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(x+y) &= (x+y-n)A_n(x+y)\\
&= (x+y-n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x+y-n)A_k(x)A_{n-k}(y)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[A_{k+1}(x)A_{n-k}(y) + A_k(x)A_{n-k+1}(y)\right] \qquad \textit{(d'après \textbf{2.c.})}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_{k+1}(x)A_{n-k}(y) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}A_k(x)A_{n-k+1}(y) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y) \qquad \textit{(changement d'indice)}\\
&= A_{n+1}(x)A_0(y) + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]A_k(x)A_{n-k+1}(y) + A_0(x)A_{n+1}(y)\\
&= A_{n+1}(x)A_0(y) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y) + A_0(x)A_{n+1}(y) \qquad \textit{(formule de Pascal)}\\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}A_k(x)A_{n-k+1}(y)}
\end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est démontrée.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$.

e. D'après la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{A_n(x+y)}{n!} &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(x)A_{n-k}(y)\\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}A_k(x)A_{n-k}(y)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{A_k(x)}{k!}\frac{A_{n-k}(y)}{(n-k)!}\end{aligned}$$

quels que soient les réels x et y. En posant $x = a$, $y = b$ et en utilisant trois fois le résultat de la question ***2.a.*** pour faire intervenir les coefficients binomiaux, on reconnait alors l'identité voulue :

$$\boxed{\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}$$

3. a. On cherche d'abord à se ramener à une somme de la forme précédente en utilisant la formule de symétrie des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.\end{aligned}$$

Il s'agit du cas particulier $a = b = n$ de la formule de Vandermonde, d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{la somme est égale à } \binom{2n}{n}.}$$

b. En notant respectivement A_k et B_k les évènements « Alice obtient k piles » et « Bob obtient k piles » pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, l'évènement E : « Alice et Bob obtiennent le même nombre de piles » est la réunion $E = \bigcup_{k=0}^{n}(A_k \cap B_k)$. Or les évènements $(A_k \cap B_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont *deux à deux incompatibles* (car les A_k le sont), et de plus les évènements A_k et B_k sont *indépendants*, donc la probabilité de la réunion est :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k \cap B_k) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B_k).$$

La pièce étant équilibrée et les lancers indépendants, tous les tirages sont *équiprobables.* Il y a 2^n tirages de longueur n, parmi lesquels exactement $\binom{n}{k}$ tirages réalisent A_k (et de même pour B_k). Ainsi, $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(B_k) = \binom{n}{k}/2^n$. D'après le calcul de la question précédente, la probabilité qu'Alice obtienne autant de « pile » que Bob est donc :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \boxed{\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}}$$

Notons A (respectivement B) l'évènement « Alice (resp. Bob) obtient strictement plus de piles que Bob (resp. Alice) ». Alors (E, A, B) forme un *système complet d'évènements.* Ainsi $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$. Par symétrie, $\mathbb{P}(A)$ est égal à $\mathbb{P}(B)$, donc on en déduit que la probabilité recherchée est :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)}$$

Problème

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,1]$. $f'(x) = 1 - 2x$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	0

Avec $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$. □

2. a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (x_n), on a : $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est décroissante.}}$$

Démontrons alors qu'elle est minorée.
Plus précisément, montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $x_n \in [0,1]$.

1. **<u>Initialisation</u>**
$x_0 \in]0,1[$ donc $x_0 \in [0,1]$.
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

2. **<u>Hérédité</u> :** soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. (*i.e.* $x_{n+1} \in [0,1]$)
Par définition de la suite (x_n), on a : $x_{n+1} = f(x_n)$.

Or, par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait que : $x_n \in [0,1]$.

De plus, par le tableau de variation précédent, comme $x_n \in [0,1]$, on a $f(x_n) \in [0, \frac{1}{4}]$.
Ainsi, on a : $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant 1$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.
La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente vers un réel ℓ_1.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$, on en déduit que $\ell_1 \in [0,1]$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \ell_1 \in [0,1].}$$ □

b. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- On vient de démontrer que : $x_n \to \ell_1$.
- De plus : $x_{n+1} \to \ell_1$ car (x_{n+1}) est une suite extraite de (x_n).
- Enfin, comme f est continue sur $[0,1]$, $f(x_n) \to f(\ell_1)$.

Par passage à la limite dans l'égalité : $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient : $\cancel{\ell_1} = f(\ell_1) = \cancel{\ell_1} - (\ell_1)^2$.
On en déduit que : $-(\ell_1)^2 = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \ell_1 = 0.}$$

□

3. a. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement : $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$.

1. **Initialisation**

- $x_0 \in [0,1]$.
- Or $x_1 = f(x_0)$. Donc $x_1 \in \text{Im} f = [0, \frac{1}{4}]$.
- Enfin, on a : $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que : $0 < x_1 \leqslant \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$.
La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

2. **Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$.**

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. ($i.e.$ $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$)

Par hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}(n)$), on sait que : $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(l'inégalité $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ provient du fait que $n \geqslant 1$)
La fonction f étant strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, on en déduit que :

$$f(0) < f(x_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Or $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \left(\dfrac{1}{n+1}\right)^2 = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{n}{(n+1)^2}$.
Montrons alors par équivalence que : $\dfrac{n}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n+2}$.

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1$$

Ainsi : $0 < x_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$.

Notons enfin que $x_0 \in]0,1[$ et que $\dfrac{1}{0+1} = 1$. On en déduit que $\mathcal{P}(0)$ est aussi vérifiée.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < x_n < \frac{1}{n+1}}$$ □

b. Retrouver alors la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$.
Or $0 \to 0$ et $\dfrac{1}{n+1} \to 0$.

D'après le théorème d'encadrement (*ou théorème des gendarmes*), la suite (x_n) est convergente, de limite 0. □

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nx_n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)\, x_{n+1} - nx_n \\ &= (n+1)\,(x_n - x_n^2) - nx_n \qquad \textit{(par définition de } (x_n)\textit{)} \\ &= \cancel{nx_n} + x_n - (n+1)\, x_n^2 - \cancel{nx_n} \\ &= x_n - (n+1)\, x_n^2 \\ &= x_n\,(1 - (n+1)\, x_n) \end{aligned}$$

Or : $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$. Donc : $0 < (n+1)\, x_n < 1$ et $-1 < -(n+1)\, x_n < 0$. Ainsi : $0 < 1-(n+1)\, x_n$.
De plus : $x_n > 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$. La suite (v_n) est strictement croissante. □

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, qu'on ne demande pas de calculer.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***3.a.***, on a : $0 < n\, x_n < \dfrac{n}{n+1} < 1$.

La suite (v_n) est croissante et majorée (par 1). Elle converge donc vers un réel ℓ. □

c. Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.

Démonstration.
D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < v_n < 1$ et (v_n) est convergente.

Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \in [0, 1]$.

Il s'agit alors de vérifier que : $\ell > 0$.

- On sait que $v_1 = x_1 > 0$.
- Or (v_n) est strictement croissante. On en déduit que : $\forall n \geqslant 1,\ v_n > v_1 > x_1$.

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient que : $\ell \geqslant x_1 > 0$.

Ainsi, on a bien : $0 < \ell \leqslant 1$. □

5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.

a. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et v_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_{n+1} = (n+1)\, x_{n+1} = (n+1)\,(x_n - x_n^2)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
w_n &= n\,(v_{n+1} - v_n)\\
&= n\, v_{n+1} - n\, v_n\\
&= n\,(n+1)\,(x_n - x_n^2) - n\, v_n\\
&= (n+1)\,(n\, x_n - n\, x_n^2) - n\, v_n\\
&= (n+1)\,(v_n - n x_n^2) - n\, v_n\\
&= (\cancel{n}+1)\, v_n - (n+1)\, n\, x_n^2 - \cancel{n\, v_n}\\
&= v_n - n^2\, x_n^2 - n\, x_n^2 \;=\; v_n - v_n^2 - (n\, x_n)\, x_n = \; v_n - v_n^2 - v_n\, x_n\\
&= v_n\,(1 - v_n - x_n)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n\,(1 - v_n - x_n)}$$ □

b. En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1-\ell)$.

Démonstration.
Comme (x_n) et (v_n) sont convergentes, la suite (w_n) est convergente par sommes et produits de suites convergentes. Plus précisément, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
w_n & = & v_n & (1 & - & v_n & - & x_n) \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \ell & & & \ell & & 0
\end{array}$$

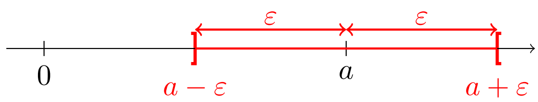
$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (w_n) \text{ est convergente, de limite } \ell\,(1-\ell).}$$ □

6. Dans cette question, on va démontrer par l'absurde que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge forcément vers 0.
On suppose donc, uniquement dans cette question, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $a > 0$.

a. Montrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \geqslant b$.

Démonstration.
On suppose que $w_n \to a$.

- Ainsi, tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite (w_n) sauf (éventuellement) un nombre fini d'entre eux. Comme $a > 0$ et pour ε bien choisi ($\varepsilon = \frac{a}{2}$ par exemple), cette situation peut se résumer par le dessin suivant :



(l'intervalle rouge contient tous les w_n sauf (éventuellement) un nombre fini d'entre eux)

Formellement, si on note $\varepsilon = \frac{a}{2}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \ |w_n - a| < \varepsilon$.

Autrement dit, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ a - \varepsilon < w_n < a + \varepsilon \quad$ *i.e.* $\quad \forall n \geqslant n_0,\ \frac{a}{2} < w_n < \frac{3a}{2}$

- D'autre part, si $n \geqslant 1$, on a : $w_n = \underbrace{n}_{>0}\,\underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{>0} > 0$.

Notons $m = \min\limits_{n \in [\![1, n_0-1]\!]} (w_n)$ et $b = \min(m, \frac{a}{2})$. On a alors :

× $\forall n \in [\![1, n_0-1]\!],\ w_n \geqslant m$ par définition de m.

On en déduit que : $\forall n \in [\![1, n_0-1]\!],\ w_n \geqslant m \geqslant \min(m, \frac{a}{2}) = b$

× $\forall n \geqslant n_0,\ w_n \geqslant \frac{a}{2}$ par la démonstration au-dessus.

On en déduit que : $\forall n \geqslant n_0,\ w_n \geqslant \frac{a}{2} \geqslant \min(m, \frac{a}{2}) = b$

$$\boxed{\text{On a donc trouvé } b > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n \geqslant b.}$$

□

b. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{w_n}{n} \leqslant 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de (w_n), on a : $\dfrac{w_n}{n} = v_{n+1} - v_n$.
On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{n=1}^{p} \dfrac{w_n}{n} & = & \sum\limits_{n=1}^{p} (v_{n+1} - v_n) & \\ & = & v_{p+1} - v_1 & \textit{(on reconnaît une somme télescopique)} \\ & < & v_{p+1} & \textit{(car } v_1 > 0\textit{)} \\ & < & 1 & \textit{(démontré en } \textbf{\textit{4.b.}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{p} \frac{w_n}{n} \leqslant 1}$$

□

c. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \ln(x+1) - \ln(x)$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{b}{n} \geqslant b \ln(p+1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Remarquons tout d'abord que : $\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
- Démontrons que, pour tout $t > 0$, on a : $\ln(1+t) \leqslant t$.
  On note $h : t \mapsto t - \ln(1+t)$. Soit $t > 0$:

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{(\cancel{1} + t) - \cancel{1}}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqslant 0$$

On en déduit que h est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $h(0) = 0 - \ln 1 = 0$.
Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $h(t) \geqslant 0$ *i.e.* $t - \ln(1+t) \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall t > 0,\ \ln(1+t) \leqslant t}$$

Remarque C'est une inégalité classique ! Il existe une manière plus élégante de démontrer cette inégalité. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave. Sa courbe représentative est donc située sous ses tangentes, notamment sa tangente en 0 qui est la droite d'équation $y = t$.

En utilisant cette inégalité avec $t = \dfrac{1}{x}$, on obtient que : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \frac{1}{x} \geqslant \ln(x+1) - \ln(x)}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{b}{n} & = & b \sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{n} & \\
& \geqslant & b \sum\limits_{n=1}^{p} (\ln(n+1) - \ln(n)) & \textit{(par l'inégalité précédente en } x = n > 0\textit{)} \\
& = & b\,(\ln(p+1) - \cancel{\ln(1)}) & \textit{(on reconnaît une somme télescopique)} \\
& = & b\,\ln(p+1) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{p} \frac{b}{n} \geqslant b \ln(p+1)}$$

□

d. En déduire une contradiction et conclure.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{w_n}{n} & \geqslant & \sum\limits_{n=1}^{p} \frac{b}{n} & \textit{(car } w_n \geqslant b \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& \geqslant & b \ln(p+1) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

De plus, d'après la question ***6.b.***, $\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{w_n}{n} \leqslant 1$.
On en déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ b \ln(p+1) \leqslant 1$$

Or comme $b > 0$, $b\,\ln(p+1) \to +\infty$ ce qui permet d'affirmer qu'à partir d'un certain rang $p_0 \in \mathbb{N}^*$, $b\,\ln(p+1) \geqslant 3$.

$$\boxed{\text{On aurait alors : } 1 \geqslant 3, \text{ ce qui est absurde.}}$$

Par l'absurde, on a donc démontré que la limite a de (w_n) n'est pas strictement positive.
Autrement dit, on a : $a \leqslant 0$.
Or on sait que pour tout $n \geqslant 1$, $w_n > 0$ (*cf* ***6.a.***). On en déduit que sa limite a vérifie : $a \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Au final, la limite de } (w_n) \text{ est : } a = 0.}$$

□

7. Déduire des questions précédentes que $\ell = 1$.

Démonstration.
On a démontré en question ***5.b.*** que (w_n) converge vers $\ell\,(1-\ell)$.
D'après la question précédente, cette limite est nulle. Ainsi : $\ell\,(1-\ell) = 0$.
Ceci signifie que :

× soit $\ell = 0$, ce qui est impossible d'après la question ***4.c.***

× soit $1 - \ell = 0$ *i.e.* $\ell = 1$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \ell = 1.}$$

□

Partie 2

8. ***a.*** Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n > n_0$. Notons tout d'abord que le réel L peut aussi s'écrire sous la forme :

$$L = L \times \frac{1}{S_n} \times \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{S_n} \times \sum_{k=1}^{n} u_k\, L.$$

En injectant ceci dans l'expression proposée, on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L\right| &= \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}(u_k y_k - u_k\, L)\right| \\ &= \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k(y_k - L)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|S_n|}\sum_{k=1}^{n} |u_k|\,|y_k - L|\,, \quad \text{par inégalité triangulaire}\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, la suite (u_n) est une suite à termes (strictement) positifs, donc $|u_k| = u_k$ et $|S_n| = S_n$. Puis par sommation par paquets, on obtient pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L\right| &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,|y_k - L| \\ &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\,|y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\,|y_k - L|\,.\end{aligned}$$

b. Traduisons tout d'abord l'hypothèse « (y_n) converge vers le réel L ».
Soit $\varepsilon > 0$**.** Il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall k > N_0,\ \ |y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, par hypothèse (S_n) est une suite croissante (car somme de terme strictement positifs) divergente par hypothèse, donc divergente vers $+\infty$ d'après le théorème de convergence monotone. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Comme le terme $\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\,|y_k - L|\right)$ est indépendant de n, on en déduit par opérations algébriques :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\,|y_k - L| = 0,$$

ce qui signifie exactement qu'il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n > N_1,\ \ \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\,|y_k - L|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

i.e, par positivité des termes sous la valeur absolue :

$$\forall n > N_1,\ \ \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\,|y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en appliquant la question précédente avec $n_0 = N_0$, on obtient pour tout $n > N_1$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L\right| &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k, \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte d'une simple majoration (les termes u_k sont positifs !) :

$$\frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k = 1.$$

Récapitulons notre résultat : à $\varepsilon > 0$ fixé, on a trouvé un rand $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N_1, \ \left| \frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k y_k\right) - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat.

9. a. • Par hypothèse, la suite (z_n) est strictement croissante, donc la suite (a_n) est strictement positive, pour tout entier naturel n.

• De plus, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1})$, ce qui donne par télescopage :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = z_n - z_0.$$

Comme par hypothèse la suite (z_n) diverge vers $+\infty$, on en déduit que (par somme), la suite $(z_n - z_0)$ diverge elle aussi vers $+\infty$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

b. D'après les résultats de la question 7 appliqués avec $x_n = a_n$ et $y_n = b_n$, on peut écrire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \gamma.$$

Or on remarque que pour tout entier naturel k, $a_k\, b_k = t_k - t_{k-1}$, ce qui permet d'écrire par télescopage :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{z_n - z_0}(t_n - t_0) = \gamma.$$

Déduisons-en que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n}{z_n} = \gamma$.

$$\begin{aligned}\frac{t_n}{z_n} &= \frac{t_n}{z_n - z_0} \times \frac{z_n - z_0}{z_n}\\ &= \frac{t_n}{z_n - z_0} \times \left(1 - \frac{z_0}{z_n}\right)\\ &= \frac{t_n - t_0 + t_0}{z_n - z_0} \times \left(1 - \frac{z_0}{z_n}\right)\\ &= \left(\frac{t_n - t_0}{z_n - z_0} + \frac{t_0}{z_n - z_0}\right) \times \left(1 - \frac{z_0}{z_n}\right)\end{aligned}$$

Passons à la limite dans l'expression ci-dessus (ce qui est autorisé puisque que la suite (z_n) diverge vers $+\infty$) :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_0}{z_n - z_0} = 0.$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{z_0}{z_n}\right) = 1.$

Par ailleurs, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n - t_0}{z_n - z_0} = \gamma$.

Ainsi, par théorèmes généraux, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{z_n}=\gamma.}$$

10. a. Un simple calcul montre que pour tout entier naturel n : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\frac{1}{x_n}-n}=n\,x_n$. D'après les résultats de la partie 1, on reconnait la suite (v_n), dont on sait qu'elle converge vers 1. D'où le résultat :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1-nx_n)}{\frac{1}{x_n}-n}=1.}$$

b. Par définition de la suite (x_n), on a : $x_{n+1}=x_n^2-x_n$. d'où le calcul suivant (après simplifications élémentaires) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}-1&=\frac{1}{x_n}\Big(\frac{1}{1-x_n}-1\Big)-1\\&=\frac{1}{x_n}\Big(\frac{x_n}{1-x_n}\Big)-1\\&=\frac{1}{1-x_n}-1\\&=\frac{x_n}{1-x_n}\end{aligned}$$

On en déduit alors (en multipliant en haut et en bas par n : c'était toute l'astuce !)

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}&=\frac{n\,x_n}{1-x_n}n\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{n\,x_n}{1-x_n}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Or, il est bien connu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$ d'après le théorème de composition des limites appliqué avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et la limite classique $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Par ailleurs, d'après les résultats de la partie 1, on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,x_n}{1-x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{1-x_n}=\frac{1}{1-0}=1$.

Par théorèmes généraux d'opérations sur les limites, on a donc prouvé :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1.}$$

c. Vérifions que les suites (t_n) et (z_n) ainsi définies satisfont les conditions de la question ***8*** pour un certain réel γ (à déterminer, car l'énoncé ne nous l'indique pas) :

— La suite (z_n) de terme général $z_n=\ln n$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ d'après le cours.

— Pour tout $n\geqslant 2$, $\dfrac{t_n-t_{n-1}}{z_n-z_{n-1}}=\dfrac{\frac{1}{x_n}-n-\frac{1}{x_{n-1}}+n-1}{\ln n-\ln(n-1)}=\dfrac{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}-1}{\ln(\frac{n}{n-1})}=\dfrac{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}-1}{\ln(1+\frac{1}{n-1})}$ et ce quotient tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ d'après ***10.b.*** (au changement d'indice près).

Les conditions sont donc bien vérifiées en **posant** $\gamma = 1$. D'après ***8.b.***, on en déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_n}{z_n} = \gamma = 1.$$

On obtient alors d'après le théorème d'opérations sur les limites (en utilisant ***9.a.***) :

$$\frac{n(1-nx_n)}{\ln n} = \frac{n(1-nx_n)}{\frac{1}{x_n}-n} \times \frac{\frac{1}{x_n}-n}{\ln n} = \frac{n(1-nx_n)}{\frac{1}{x_n}-n} \times \frac{t_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1.$$

En considérant la suite (ε_n) de terme général $\varepsilon_n = 1 - \dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n}$, on a donc pour tout $n \geqslant 2$:

$$\boxed{\frac{n(1-nx_n)}{\ln n} = 1 - \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1 - 1 = 0.}$$

d. Question immédiate, même en ayant admis TOUTES LES QUESTIONS DU PROBLÈME ! Il suffit d'isoler la suite (x_n) dans l'expression de la question précédente.

$$\begin{aligned} & \frac{n(1-nx_n)}{\ln n} = 1 - \varepsilon_n \\ \Leftrightarrow\ & n(1-nx_n) = \ln n\,(1-\varepsilon_n) \\ \Leftrightarrow\ & 1 - nx_n = \frac{\ln n}{n}\,(1-\varepsilon_n) \\ \Leftrightarrow\ & -nx_n = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln n\,\varepsilon_n}{n} - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x_n = -\frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n\,\varepsilon_n}{n^2} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{x_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}\varepsilon_n.}$$