Concours blanc n$^{\text{o}}$ 1

Mercredi 4 janvier 2017

Durée : 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : ***l'usage de la calculatrice ou de tout autre matériel électronique est interdit.***
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2017x^2 - x + 2017$.

2. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{k-1}$ (où n est un entier naturel).

3. Résoudre l'équation $|x^2 + x - 2| + |x + 1| = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2^x \end{array}$.
L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

5. On tape les commandes suivantes dans Scinotes :

```
function T = choixCalc(n,i)
   aux = (1:n)
   if i==-1 then
       T = prod(aux)
   elseif i==1 then
       T = sum(aux)
   end
endfunction
```

a. Décrire précisément les différents éléments de ce code (nom de la fonction, des arguments d'entrée, de sortie, calcul effectué).

b. Que se passe-t-il si l'on effectue l'appel : `choixCalc(5,2)` ? Comment peut-on modifier le code de la fonction `choixCalc` pour éviter cette situation ?

c. Écrire un programme :

- qui demande à l'utilisateur d'entrer un entier `n` au clavier,

. et qui affiche la valeur du quotient $\dfrac{\texttt{n!}}{\sum\limits_{k=1}^{\texttt{n}} k}$.

Pour ce faire, on devra effectuer des appels à la fonction `choixCalc`.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}.$$

1. Montrer que :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n\, n!)^2}.$$

2. Étudier la monotonie la suite (u_n).

3. En déduire la convergence de la suite (u_n) vers un certain réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = (n+1)u_n^2$.

a. Montrer que pour tout réel x positif,

$$(x+2)(2x+1)^2 \leqslant 4(x+1)^3.$$

b. Étudier la monotonie de la suite (v_n).

c. En déduire la convergence de la suite (v_n) vers un certain réel $\beta \in \mathbb{R}$ (que l'on n'explicitera pas).

d. En déduire la valeur du réel α.

Exercice 3

Soient a, b et n des entiers naturels tels que $n \leqslant a+b$. L'objectif de l'exercice est de donner deux démonstrations (par des méthodes différentes) et une application de la formule d'Alexandre-Théophile Vandermonde (1772) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

1. *Méthode combinatoire probabiliste.* On considère un tirage aléatoire simultané de n boules dans une urne contenant a boules rouges et b boules bleues.

a. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire.

b. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, a\}$. Montrer que la probabilité d'obtenir k boules rouges est égale à $\dfrac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$.

c. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

2. *Méthode calculatoire.* Pour tout k entier naturel, on considère le polynôme $A_k(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$. En particulier, A_0 est le polynôme constant égal à 1. Soient x et y deux nombres réels.

a. Vérifier, pour tous k et p entiers naturels tels que $k \leqslant p$, que $\dfrac{A_k(p)}{k!} = \dbinom{p}{k}$.

b. Montrer que, pour tout k entier naturel, $A_{k+1}(x) = (x-k)A_k(x)$.

c. En déduire la relation suivante pour tous n et k entiers naturels tels que $k \leqslant n$:

$$(x+y-n)A_k(x)A_{n-k}(y) = A_{k+1}(x)A_{n-k}(y) + A_k(x)A_{n+1-k}(y).$$

d. En vous inspirant de la démonstration de la formule du binôme de Newton et en utilisant la relation précédente, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x)A_{n-k}(y).$$

e. Déduire des questions précédentes une nouvelle démonstration de la formule de Vandermonde.

3. *Application.* Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel.

a. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ à l'aide de la formule de Vandermonde.

b. Alice lance n fois une pièce équilibrée, Bob lance lui aussi n fois la pièce. On suppose que les lancers sont indépendants. Quelle est la probabilité qu'Alice obtienne autant de « pile » que Bob ? Quelle est la probabilité qu'Alice obtienne strictement plus de « pile » que Bob ?

Problème

Partie 1

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - x^2$.

2. ***a.*** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle est convergente.

b. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. ***a.*** Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement : $0 < x_n < \dfrac{1}{n+1}$.

b. Retrouver alors la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = nx_n$.

a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, qu'on ne demande pas de calculer.

c. Montrer que $0 < \ell \leqslant 1$.

5. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.

a. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n en fonction de x_n et v_n.

b. En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell(1-\ell)$.

6. Dans cette question, on va démontrer par l'absurde que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
On suppose donc, uniquement dans cette question, que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $a>0$.

a. Montrer qu'il existe un réel $b>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n \geqslant b$.

b. Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{w_n}{n}\leqslant 1$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

c. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a $\dfrac{1}{x}\geqslant \ln(x+1)-\ln(x)$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{b}{n}\geqslant b\ln(p+1)$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

d. En déduire une contradiction et conclure.

7. Déduire des questions précédentes que $\ell=1$.

Partie 2

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la suite de terme général $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$ soit divergente, et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente. On pose : $L=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}y_n$.

a. Établir pour tout entier $n_0\in\mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n>n_0$ l'inégalité suivante :

$$\left|\frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k y_k\right)-L\right|\leqslant\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0}u_k|y_k-L|+\frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k|y_k-L|$$

b. En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}u_k y_k=L$.

8. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et γ un réel tels que
- la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$;
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n-t_{n-1}}{z_n-z_{n-1}}=\gamma$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n=z_n-z_{n-1}$ et $b_n=\dfrac{t_n-t_{n-1}}{z_n-z_{n-1}}$.

a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la question 7.

b. En appliquant le résultat de la question 7 aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{t_n}{z_n}=\gamma$.

9. ***a.*** Établir la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(1-nx_n)}{\dfrac{1}{x_n}-n}=1$.

b. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}-1\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=1$.

c. En déduire, en utilisant le résultat de la question 8 avec $t_n=\dfrac{1}{x_n}-n$ et $z_n=\ln n$, l'existence d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 2}$ de limite nulle telle que : $\dfrac{n(1-nx_n)}{\ln n}=1-\varepsilon_n$.

d. En déduire finalement le développement asymptotique suivant : $x_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{\ln n}{n^2}+\dfrac{\ln n}{n^2}\varepsilon_n$.