Colles de mathématiques en E1A

Suites, ensembles et applications

du 21 au 25 novembre (semaine 9)

La colle porte principalement sur les ensembles et les applications mais elle pourra aussi donner lieu à un exercice sur les suites.

1 Connaissances exigibles

— Tout le cours sur la convergence et la divergence des suites.
— Définition de l'inclusion. Prouver l'égalité de deux ensembles par double inclusion.
— Ensembles des parties. Produit cartésien. Opérations sur les ensembles. Règles de calcul.
— Ensemble fini. Cardinal.
— Composition de deux applications. Règles de calcul.
— Applications réciproques. Caractérisation. Unicité. Réciproque d'une composée.
— Injectivité. Une application strictement monotone est injective.
— Surjectivité. Image d'une partie par une application.
— Bijectivité. Une application est bijective si et seulement si elle admet une réciproque.
— Interprétation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité en termes d'antécédents.

2 Questions de cours

Tous les élèves écrivent la définition de *injective* et de *surjective* avec les quantificateurs.

- *Règles de calcul avec les ensembles.* Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E.

  Propriétés de la réunion.
  — $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)
  — $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
  — $A \cup \emptyset = A$ (élément neutre)
  — $A \cup E = E$ (élément absorbant)
  — $A \cup A = A$ (idempotence)
  — $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (treillis)
  — Si $A \subset B$, alors $A \cup C \subset B \cup C$ (croissance)

  Distributivité.
  — $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  — $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  Propriétés de l'intersection.
  — $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)
  — $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
  — $A \cap E = A$ (élément neutre)
  — $A \cap \emptyset = \emptyset$ (élément absorbant)
  — $A \cap A = A$ (idempotence)
  — $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ (treillis)
  — Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$ (croissance)

  Lois de De Morgan.
  — $\overline{\overline{A}} = A$
  — $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  — $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  Si on le leur demande, les élèves doivent pouvoir démontrer ces règles en revenant aux définitions. Les noms des propriétés ne sont pas à connaître.

- *Caractérisation des applications réciproques.* Soient E,F deux ensembles et $u : E \to F$, $v : F \to E$ deux applications. Alors u et v sont réciproques si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ (u(x) = y \iff x = v(y)).$$

DÉMONSTRATION. On procède par double implication.

— On suppose que u et v sont réciproques. Alors $v \circ u = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{id}_F$. Soit $(x, y) \in E \times F$. Montrons que $(u(x) = y \iff x = v(y))$:

($\Rightarrow$) On suppose que $u(x) = y$. Alors $v(u(x)) = v(y)$. Or $v(u(x)) = (v \circ u)(x) = \mathrm{id}_E(x) = x$ car u et v sont réciproques, donc $x = v(y)$.

($\Leftarrow$) On suppose que $x = v(y)$. Alors $u(x) = u(v(y))$. Or $u(v(y)) = (u \circ v)(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$ car u et v sont réciproques, donc $u(x) = y$.

— On suppose que $\forall (x, y) \in E \times F,\ (u(x) = y \iff x = v(y))$.
Montrons que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in E$. Posons $y = u(x)$. Alors $x = v(y)$ d'après l'hypothèse, donc $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(y) = x$.
Montrons que $u \circ v = \mathrm{id}_F$. Soit $y \in F$. Posons $x = v(y)$. Alors $u(x) = y$ d'après l'hypothèse, donc $(u \circ v)(y) = u(v(y)) = u(x) = y$.
Ainsi, $v \circ u = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{id}_F$ donc u et v sont réciproques.

- *Caractérisation des bijections.* Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors f est bijective si et seulement si elle admet une réciproque.

DÉMONSTRATION.

($\Leftarrow$) On suppose que f admet une réciproque f^{-1}. Montrons que f est bijective.

— Injectivité. Montrons que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$.
Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$. On en déduit que $x_1 = x_2$ car $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

— Surjectivité. Montrons que $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
Soit $y \in F$. Posons $x = f^{-1}(y)$. Alors $x \in E$ et $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ car $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

($\Rightarrow$) On suppose que f est bijective. Alors f est surjective, donc tout $y \in F$ admet au moins un antécédent dans E, que l'on note $g(y)$. Ceci définit une application $g : F \to E$. Montrons que f et g sont réciproques.

— Montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Soit $y \in F$. Par définition de $g(y)$, on a $f(g(y)) = y$.

— Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$. Comme précédemment $f(g(y)) = y$, donc $f(g(y)) = f(x)$. Puisque f est injective, on en déduit que $g(y) = x$. Ainsi, $g(f(x)) = x$.