Colles de mathématiques en E1A

Convergence des suites réelles

du 14 au 18 novembre (semaine 8)

1 Connaissances exigibles

Tout le cours sur la convergence et la divergence des suites a été fait, ainsi que les exercices. S'ajoutent donc au programme de la semaine dernière :

— Le suites adjacentes. La condition ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$) se déduit des trois autres.
— Croissances comparées. Application au calcul de limites.
— Divergence vers $+\infty$, divergence vers $-\infty$. Théorème de comparaison.
— Théorème de la limite monotone complet (cas borné et cas non borné).

Tous les élèves devront faire au moins une démonstration par récurrence et une étude de monotonie.

On pourra poser en fin de colle une question élémentaire sur les ensembles (inclusion, égalité, ensemble des parties, opérations).

2 Questions de cours

Il y a quatre menus :

- *Théorème des suites adjacentes.* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que $(v_n - u_n)$ converge vers 0. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$. De plus, (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

  Démonstration. (faire un croquis)
  — Pour tout $n \in \mathbb{N}, (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \leq 0$ par croissance de (u_n) et décroissance de (v_n). Ainsi, la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et de limite 0. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geq 0$, ce qui prouve le premier point.
  — Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de (v_n), on sait que $v_n \leq v_0$. Or $u_n \leq v_n$, donc $u_n \leq v_0$. Ceci montre que (u_n) est majorée. Or elle est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que (u_n) converge. Notons ℓ_1 sa limite.
  — Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de (u_n), on sait que $u_0 \geq u_n$. Or $u_n \leq v_n$, donc $v_n \geq u_0$. Ceci montre que (v_n) est minorée. Or elle est décroissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que (v_n) converge. Notons ℓ_2 sa limite.
  — Par opération sur les limites, $(v_n - u_n)$ converge vers $\ell_2 - \ell_1$. Or $\lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ par hypothèse, donc $\ell_2 - \ell_1 = 0$ (unicité de la limite), c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$.

- *Théorème de la limite monotone dans le cas non borné.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et non majorée. Alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

  Démonstration. Par négation de « (u_n) est majorée », on sait que $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.
  Il s'agit de montrer que $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \geq M$. (faire un croquis)
  Soit $M \in \mathbb{R}$. Puisque (u_n) n'est pas majorée, on peut trouver un entier n_0 tel que $u_{n_0} > M$.
  Soit $n \geq n_0$. Alors $u_n \geq u_{n_0}$ car la suite (u_n) est supposée croissante. Or $u_{n_0} > M$, donc $u_n \geq M$.

Théorème de comparaison. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) aussi.

DÉMONSTRATION. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrons que (v_n) aussi, *i.e.* :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ v_n \geq M. \qquad \text{(faire un croquis)}$$

Soit $M \in \mathbb{R}$. Par hypothèse sur (u_n), on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq M$.
Soit $n \geq n_0$. On a donc $u_n \geq M$. Par ailleurs $v_n \geq u_n$, donc $v_n \geq M$.

- *Exemple type d'étude de suite.* Soit (u_n) telle que $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

DÉMONSTRATION. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre u_n est bien défini et vérifie $u_n \in [0,1]$, propriétés qu'on notera $\mathcal{P}_n$.

— Initialisation. u_0 est défini par l'énoncé et vérifie $u_0 \in [0,1]$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$. Ainsi, u_n est bien défini et $0 \leq u_n \leq 1$. Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ est bien défini aussi. Par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a de plus $\sqrt{0} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{1}$, c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. On a prouvé $\mathcal{P}_{n+1}$.

— Conclusion : le principe de récurrence montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$.

Étudions la monotonie de (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \geq u_n$ car $u_n \in [0,1]$, d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$. On en déduit que (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$. En particulier $0 \leq u_0 \leq \ell$. On sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 1$ donc $\ell \leq 1$ par passage à la limite. Ainsi, $\ell \in [0,1]$.
Calcul de la limite. On sait que (u_n) converge vers ℓ, donc (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Ainsi, u_{n+1}^2 tend vers ℓ^2 par multiplication. Or $u_{n+1}^2 = u_n$, qui tend vers ℓ, donc $\ell^2 = \ell$ par unicité de la limite. Ceci montre que $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Si $u_0 > 0$, on en déduit que $\ell = 1$ car $\ell \geq u_0$. Si $u_0 = 0$, une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$ et donc $\ell = 0$.

- *Exemple type d'étude de suite.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

DÉMONSTRATION. Soit $f : x \mapsto 1 + x^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

— Étude du signe de $x \mapsto f(x) - x = x^2 - x + 1$. Il s'agit d'un polynôme du second degré de discriminant $(-1)^2 - 4 = -3$ strictement négatif, donc $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas et reste de signe constant. Or $f(0) - 0 > 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x > 0$.

— Croissance de (u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après ce qui précède. On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

— Supposons que (u_n) soit majorée. Alors d'après le théorème de la limite monotone (elle est croissante), elle est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors (u_{n+1}) converge également vers ℓ. Mais par opérations sur les limites, $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ tend vers $1 + \ell^2$. L'unicité de la limite montre que $\ell = 1 + \ell^2$, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$. Or $f(\ell) - \ell \neq 0$ d'après l'étude de $x \mapsto f(x) - x$, donc il y a une contradiction. On en déduit que (u_n) n'est pas majorée.

— La suite (u_n) est croissante et non majorée. D'après le théorème de la limite monotone, elle diverge donc vers $+\infty$.