Colles de mathématiques en E1A

Généralités sur les suites, convergence

du 7 novembre au 11 novembre (semaine 7)

1 Connaissances exigibles

- Tout sur les suites usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Définition de suite majorée, minorée, bornée.
- Définition de suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante. Caractérisation de la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le signe de la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Monotonie des suites arithmétiques et géométriques.
- Définition de la convergence. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $|q|<1$.
- Théorème d'unicité de la limite.
- Opérations sur les limites : somme, produit, quotient.
- Théorème d'encadrement. Méthode pratique : pour montrer que $u_n \to \ell$, on cherche à majorer $|u_n-\ell|$ par le terme général d'une suite qui tend vers 0.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Théorème de la limite monotone.

2 Questions de cours

- *Caractérisation des suites bornées avec la valeur absolue.* Soit (u_n) une suite de réels. Alors (u_n) est bornée si et seulement s'il existe un réel M tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$.

  Démonstration. On procède par double implication :

  ($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe M réel tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N},\ -M\le u_n\le M$. La suite (u_n) est donc majorée par M et minorée par $-M$.

  ($\Rightarrow$) Réciproquement, supposons que (u_n) est majorée et minorée. Il existe alors des réels M_1 et M_2 tels que :
  $$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\ge M_1,\qquad \text{et}\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le M_2.$$
  Posons $M=\max(|M_1|,|M_2|)$. Montrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\le M$.
  Soit $n\in\mathbb{N}$. On a d'une part $u_n\le M_2\le |M_2|\le M$, et d'autre part $u_n\ge M_1\ge -|M_1|\ge -M$. Ainsi $-M\le u_n\le M$, ce qui équivaut à $|u_n|\le M$.

- *Convergence de la somme de deux suites convergentes.* Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels. On suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ_1 et que (v_n) converge vers un réel ℓ_2. Alors (u_n+v_n) converge, et sa limite est $\ell_1+\ell_2$.

  Démonstration. Il s'agit de montrer que $\forall\epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\ge n_0,\ |(u_n+v_n)-(\ell_1+\ell_2)|\le\epsilon$.
  Soit $\epsilon>0$. Par convergence de (u_n) et de (v_n), il existe $n_1\in\mathbb{N}$ et $n_2\in\mathbb{N}$ tels que
  $$\forall n\ge n_1,\ |u_n-\ell_1|\le\frac{\epsilon}{2},\qquad \text{et}\qquad \forall n\ge n_2,\ |v_n-\ell_1|\le\frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geq n_0$. Alors d'une part $n \geq n_1$, donc $|u_n - \ell_1| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et d'autre part $n \geq n_2$, donc $|v_n - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{2}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

- *Théorème d'encadrement.* Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite ℓ. Alors (v_n) est convergente et sa limite vaut ℓ.

  DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ |v_n - \ell| \leq \epsilon$.
  Soit $\epsilon > 0$. Par convergence de (u_n) et de (w_n), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

  $$\forall n \geq n_1,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq n_2,\ |w_n - \ell| \leq \epsilon.$$

  Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geq n_0$. Montrons que $|v_n - \ell| \leq \epsilon$.
  D'une part $n \geq n_1$, donc $u_n - \ell \geq -|u_n - \ell| \geq -\epsilon$. D'autre part $n \geq n_2$, donc $w_n - \ell \leq |w_n - \ell| \leq \epsilon$. Ainsi, $\ell - \epsilon \leq u_n$ et $w_n \leq \ell + \epsilon$. Or $u_n \leq v_n \leq w_n$, donc on en déduit que $\ell - \epsilon \leq v_n \leq \ell + \epsilon$, ce qui équivaut à $|v_n - \ell| \leq \epsilon$.