

Colles de mathématiques en E1A

Récurrance, sommes et produits

du 10 au 14 octobre (semaine 5)

Rappel. La colle commence par un bloc de questions de cours qui conditionne la note finale : strictement inférieure ou supérieure à 10.

Aux colleurs du lundi : les TD ayant lieu le lundi, soyez indulgents sur les manipulations techniques.

1 Questions de cours

- Reprise du programme précédent sur les fonctions usuelles.
- Méthode de la démonstration par récurrence.
 - Les colleurs seront **tyraniques** avec la rédaction, en particulier pour l'écriture de l'hérédité.
 - *Aux colleurs :* on n'a pas encore parlé de récurrence double ou de récurrence forte, mais elles peuvent être introduites à l'occasion d'un exercice.
- Définition de $\llbracket a, b \rrbracket$ pour tous $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, cas $a > b$ inclus. Nombre d'éléments.
- Définition de $\sum_{i=a}^b u_i$ et $\prod_{i=a}^b u_i$ pour tous $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, cas $a > b$ inclus.
- Règles de calcul sur les sommes : $\sum_i \lambda u_i$, $\sum_i (u_i + v_i)$, relation de Chasles.
- Formules pour les sommes classiques $\sum_{i=1}^n 1$, $\sum_{i=1}^n i$, $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$.
- Trois **démonstrations** pour le calcul de $\sum_{i=1}^n i$:
 - Par la méthode de Gauss : changement de l'ordre de sommation.
 - Par télescopage : $(i + 1)^2 - i^2 = \dots$
 - Par récurrence.
- Règles de calcul sur les produits finis : $\sum_i u_i v_i$, relation de Chasles.
- Définition de λ^n et $n!$ comme produits finis. Propriété $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$ avec **démonstration**.
- Formules exponentielles-logarithmes pour passer d'une somme à un produit.
- Notation $\sum_{a \in A} f(a)$ où A est un ensemble fini et f une fonction de A dans \mathbb{R} .
- Sommes sur les lignes et les colonnes d'un tableau de nombres $(a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, q \rrbracket}$.
Aux colleurs : aucun calcul de somme double n'a été vu avant les travaux dirigés du lundi.

2 Extraits du programme officiel

Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations Σ , Π .

Illustration par manipulation de sommes et de produits. \square

Formules donnant : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$.

Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^n u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de \mathbb{N} ou de \mathbb{N}^2 .

Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de \ln , \exp , $x \mapsto x$. Études asymptotiques, croissances comparées.

Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.

On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances. Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur \mathbb{R} . On insistera sur la fonction valeur absolue, non étudiée au lycée.

Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \mapsto \lfloor x \rfloor$. La notation E est réservée à l'espérance mathématique. La fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus.