

# Colles de mathématiques en E1A

Inégalités et fonctions usuelles

du 3 au 7 octobre (semaine 4)

*Rappel.* La colle commence par un bloc de questions de cours qui conditionne la note finale : strictement inférieure ou supérieure à 10.

## 1 Questions de cours

- Reprise du programme précédent sur les inégalités, la valeur absolue et la partie entière.
- Méthode de l'étude de fonctions : domaine de définition, domaine de dérivabilité, dérivée, variations, limites aux bornes du domaine, graphe avec tangentes aux points remarquables.
- Règles de dérivation, y compris la dérivée d'une fonction composée.
- Fonctions puissances entières : étude de la fonction selon l'exposant, parité/imparité.
- Fonction inverse : étude de la fonction, imparité.
- Fonction racine carrée, relation avec la fonction carré et interprétation graphique.
- Fonction valeur absolue : étude de la fonction, parité.
- Fonction partie entière : étude de la fonction.
- Fonction exponentielle : définition, étude de la fonction, règles de calcul, inégalité de convexité  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ .
- Fonction logarithme : définition, étude de la fonction, règles de calcul, relation avec la fonction exponentielle et interprétation graphique. Inégalité de concavité  $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$ .
- Fonctions puissances généralisées : définition, règles de calcul *avec démonstrations*, étude de la fonction selon l'exposant. Liens avec l'inverse, les puissances entières et les racines  $n$ -ièmes. Logarithme et puissance.

## 2 Extraits du programme officiel

### Fonctions réelles d'une variable réelle

*Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. Ils pourront mémoriser ces résultats grâce aux représentations graphiques qui en constituent une synthèse. Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*

*L'étude des fonctions usuelles donnera aux étudiants l'occasion de mobiliser leurs connaissances de terminale concernant les fonctions d'une variable réelle.*

*L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.*

*Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.*

## Compléments sur les fonctions usuelles

### Fonctions polynomiales, polynômes

Degré, somme et produit de polynômes.

Ensemble  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , ensembles  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $n$ .

Racines d'un polynôme. Factorisation par  $(X - a)$  dans un polynôme ayant  $a$  comme racine.

Trinômes du second degré.

Par convention,  $\deg 0 = -\infty$ .

La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Application : un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  admettant plus de  $n + 1$  racines distinctes est nul.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne.  $\blacktriangleright$

Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur  $\mathbb{R}$ .

### Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de  $\ln$ ,  $\exp$ ,  $x \mapsto x$ .

Études asymptotiques, croissances comparées.

### Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.

On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type  $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ .

### Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur  $\mathbb{R}$ .

On insistera sur la fonction valeur absolue, non étudiée au lycée.

### Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation  $x \mapsto [x]$ .

La notation  $E$  est réservée à l'espérance mathématique. La fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus.