

Colles de mathématiques en E1A

Équations, polynômes et inégalités

du 26 au 30 septembre (semaine 3)

1 Commentaires généraux

- La colle commence par une question de cours qui conditionne la note finale :
 - Si la question de cours n'est pas sue : note < 10 .
 - Si la question de cours est sue : note ≥ 10 .
- On sera très attentif à la rigueur de la rédaction.
 - Introduction des variables : *soit* (preuve de \forall), *posons* (preuve de \exists).
 - Démonstration d'une implication : *supposons*.
Ne surtout pas confondre la condition suffisante et la condition nécessaire.
 - Démonstration d'une équivalence : double implication.
 - Interdiction d'utiliser les symboles mathématiques comme des abréviations.
 - Respect de l'ordre des mots et utilisation des parenthèses en cas d'ambiguïté.

2 Questions de cours

- Reprise de tout le programme précédent sur les équations et les polynômes.
- Règles des signes. Équivalence entre $x \leq y$ et $x - y \leq 0$.
- Règles de calcul sur les inégalités *avec démonstrations* : pour tous x, y, z réels,

$$\begin{aligned}x \leq y &\implies x + z \leq y + z, \\(x \leq y \text{ et } z \geq 0) &\implies xz \leq yz, \\(x \leq y \text{ et } z \leq 0) &\implies xz \geq yz.\end{aligned}$$

- Définition de fonction croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante. Exemples et contre-exemples *avec démonstrations* : carré, racine carrée, inverse.
- Valeur absolue : définition, règles de calcul, inégalité triangulaire, graphe de $x \mapsto |x|$, traduction de $|x - y| \leq a$ par des encadrements.
- Partie entière : définition, encadrement $[x] \leq x < [x] + 1$, graphe de $x \mapsto [x]$.

3 Extraits du programme officiel

Fonctions polynomiales, polynômes

Degré, somme et produit de polynômes.

Ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} , ensembles $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} de degré au plus n .

Racines d'un polynôme. Factorisation par $(X - a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.

Trinômes du second degré.

Par convention, $\deg 0 = -\infty$.

La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Application : un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant plus de $n + 1$ racines distinctes est nul.

Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. \blacktriangleright

Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur \mathbb{R} .

Fonctions réelles d'une variable réelle

L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur \mathbb{R} .

On insistera sur la fonction valeur absolue, non étudiée au lycée.

Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \mapsto [x]$.

La notation E est réservée à l'espérance mathématique. La fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus.