Colles de mathématiques en E1A

Lois discrètes usuelles, intégration sur un intervalle non borné

Semaine 28 : du 15 au 19 mai

1 Connaissances exigibles

1.1 Variables aléatoires réelles discrètes

Cours :

- Notion d'ensemble dénombrable. Variables aléatoires réelles discrètes (à support fini ou infini), caractérisation de la loi par les probabilités atomiques $\mathbb{P}([X = x])$, cas des variables aléatoires à valeurs entières. Transformation d'une variable aléatoire discrète par une fonction.
- Théorème d'existence des lois discrètes. Application aux lois usuelles à support fini ou infini : certaine, Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique, Poisson. Interprétations et situations où ces lois apparaissent.
- Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète, idée de moyenne pondérée et propriétés fondamentales : linéarité, positivité, croissance. Théorème de transfert, moments d'ordre $r \in \mathbb{N}$.
- Variance, lien avec le moment d'ordre 2, formule de König-Huygens. Interprétation en termes de dispersion, cas de la variance nulle, écart-type. Calcul de l'espérance et de la variance des lois discrètes usuelles : certaine, Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique, Poisson.
- Transformation affine d'une variable aléatoire, espérance et variance. Application à la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. Centrage et réduction d'une variable aléatoire.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Déterminer le support et la loi d'une variable aléatoire réelle discrète dans une situation concrète.
- Pour une variable aléatoire discrète X, calculer $\mathbb{P}([X \in I])$ à l'aide des $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.
- Justifier l'existence d'une loi de probabilité discrète lorsque les nombres $(\mathbb{P}([X = x]))_{x \in X(\omega)}$ sont donnés.
- Reconnaître une loi discrète usuelle dans une situation concrète (typiquement un schéma de Bernoulli).
- Justifier qu'une variable aléatoire admet une espérance ou un moment d'ordre r avec $r \in \mathbb{N}$.
- Calculer une espérance ou un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ à l'aide du théorème de transfert.
- Mettre en œuvre le calcul d'une variance à l'aide de la formule de König-Huygens.
- Obtenir l'espérance et la variance de $aX + b$ à partir de celles de X. Centrer et réduire X.

1.2 Intégration sur un intervalle non borné

Cours :

- Intégration sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$, par passage à la limite. Convergence et calcul des intégrales de références : fonctions puissances (Riemann) et fonctions exponentielles. Propriétés fondamentales de l'intégration : relation de Chasles, linéarité, positivité et croissance. Théorème de comparaison pour les fonctions positives (version majoration et version équivalence).

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Étudier la convergence et la valeur d'une intégrale impropre : calcul sur un segment, puis limites.
- Étudier la convergence et la valeur d'une intégrale impropre à l'aide des propriétés fondamentales.
- Justifier la convergence d'une intégrale à l'aide du théorème de comparaison pour les fonctions positives.

2 Questions de cours suggérées

A. Tableau des lois discrètes usuelles

Le candidat reproduit sans démonstration le tableau des lois discrètes usuelles : *lien cliquable vers le tableau.* Entraînement nécessaire pour y parvenir sans hésitations et en moins de 15 minutes !

B. Autour de la variance

Questions préliminaires : à quelle condition la variance est-elle définie ? quelle est sa définition ?

Énoncé. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète qui admet un moment d'ordre 2. Alors :*

1. *Formule de König-Huygens :* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
2. *Effet d'une transformation affine : pour tous a et b réels,* $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.

Démonstration. Posons $\mu = \mathbb{E}[X]$ l'espérance de X, nombre réel qui est bien défini car l'existence d'un moment d'ordre 2 implique l'existence d'un moment d'ordre 1. Par définition, $\mathbb{V}(X)$ est l'*espérance* de la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}[X])^2 = (X-\mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\mathbb{E}[X] + \mu^2\mathbb{E}[1] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu^2.$$

Il s'agit exactement de la formule de König-Huygens. Passons maitenant au second point.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = aX+b$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[1] = a\mu + b$, d'où :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] = \mathbb{E}[(aX+b-a\mu-b)^2] = \mathbb{E}[a^2(X-\mu)^2] = a^2\,\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = a^2\,\mathbb{V}(X).$$

□

C. Convergence des intégrales de référence

Énoncé.

1. *Soient $x_0 > 0$ et α un réel. Alors $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. (Critère de Riemann)*
2. *Soient x_0 et λ deux réels. Alors $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.*

Les deux démonstrations ont été vues en cours, mais on ne demande que celle du critère de Riemann. On remarque à ce sujet qu'il s'agit d'intégrer une fonction puissance car $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ pour tout $x > 0$.

Démonstration. Suivons la méthode du cours :

- Continuité. La fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier sur $[x_0, +\infty[$ puisque $x_0 > 0$.
- Calcul de l'intégrale sur un segment. Soit $b \in [x_0, +\infty[$. On doit distinguer deux cas :

  Si $\alpha = 1$, alors : $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_{x_0}^{b} \frac{1}{x}dx = \Big[\ln(x)\Big]_{x_0}^{b} = \ln(b) - \ln(x_0)$.

  Si $\alpha \neq 1$, alors $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}dx = \int_{x_0}^{b} x^{-\alpha}dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x_0}^{b} = \frac{1}{\alpha-1}\left(x_0^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}\right)$.
- Passage à la limite. On est amené à distinguer trois cas pour calculer les limites.

  Si $\alpha = 1$, alors $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} +\infty$: l'intégrale diverge.

  Si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} +\infty$: l'intégrale diverge.

  Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{x^\alpha}dx \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}x_0^{1-\alpha}$: l'intégrale converge. □

Quizz : que vaut $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ si $\alpha > 1$? que vaut $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$ si $\lambda > 0$?