Colles de mathématiques en E1A

Probabilités générales, variables aléatoires réelles

Semaine 26 : du 1er mai au 5 mai

1 Connaissances exigibles

1.1 Probabilités générales

Cours :

— Rappel du formalisme des univers, issues et évènements. Union et intersection d'une famille d'évènements, lien avec les quantificateurs. Notion de tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble.

— Définition de (mesure de) probabilité et d'espace probabilisé. Théorème de la limite monotone et son corollaire. Notions d'évènement presque sûr (quasi-certain), d'évènement négligeable (quasi-impossible).

— Généralisation des systèmes complets d'évènements, de la formule des probabilités totales, de l'indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, et des probabilités conditionnelles.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Formaliser un évènement à l'aide d'unions et d'intersections. Interpréter une union ou une intersection.

— Calculer la probabilité d'unions ou d'intersections infinies d'évènements par passage à la limite.

— Méthodes du chapitre sur les univers finis (probabilités totales, probabilités composées, Bayes, etc.)

1.2 Variables aléatoires réelles

Cours :

— Définition d'une variable aléatoire réelle. Support. Construction des évènements $[X \in I]$ associés à une variable X lorsque I est un intervalle. Système complet d'évènements associé à une variable aléatoire.

— Loi d'une variable aléatoire réelle, fonction de répartition, caractérisation de la loi par la fonction de répartition. Propriétés de la fonction de répartition (encadrement, croissance, limites, continuité à droite).

— Notion d'ensemble dénombrable. Variables aléatoires réelles discrètes (finies ou infinies), caractérisation de la loi par les probabilités atomiques $\mathbb{P}([X = x])$, cas des variables aléatoires à valeurs entières. Transformation d'une variable aléatoire discrète par une fonction.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer le support d'une variable aléatoire réelle.

— Exprimer et représenter graphiquement la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de loi connue.

— Calculer la probabilité d'un évènement $[X \in I]$ à l'aide de la fonction de répartition de X.

— Dans le cas discret, calculer la probabilité d'un évènement $[X \in I]$ à l'aide des $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$.

2 Questions de cours suggérées

A. Évènements négligeables et évènements presque sûrs

Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

(i) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements négligeables. Alors* $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ *est un évènement négligeable.*

(ii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements presque sûrs. Alors* $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ *est un évènement presque sûr.*

Démonstration. Commençons par remarquer que A et B sont bien des évènements car $\mathscr{A}$ est une tribu. Nous allons commencer par prouver le (i), puis nous en déduirons le (ii) par passage au complémentaire.

(i) Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors d'après l'inégalité de Boole (admise, mais on pourra la redémontrer en exercice) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) = 0. \qquad \text{Or} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \in [0,1], \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = 0.$$

Par corollaire du théorème de la limite monotone, on obtient donc $\mathbb{P}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = 0$.

(ii) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \overline{B_n}$. Alors (A_n) est bien une suite d'évènements (car $\mathscr{A}$ est une tribu) qui sont négligeables car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(B_n) = 0$. En passant au complémentaire, on a par ailleurs :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right), \quad \text{donc } \mathbb{P}(B) = 1 - 0 = 1 \text{ d'après } (i).$$

□

B. Fonction de répartition et probabilité d'un intervalle $]a, b]$

Proposition. *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et dont la fonction de répartition est $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Alors, pour tous a et b réels tels que $a \leq b$,*

$$\mathbb{P}([a < X \leq b]) = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soient a et b réels tels que $a \leq b$. On décompose $F(b) = \mathbb{P}([X \leq b])$ à l'aide de la formule des probabilités totales, appliquée au système complet formé par les deux évènements contraires $[X \leq a]$ et $[X > a]$. On en déduit alors :

$$\mathbb{P}([X \leq b]) = \mathbb{P}([X \leq b] \cap [X > a]) + \mathbb{P}([X \leq b] \cap [X \leq a]).$$

Le premier évènement $[X \leq b] \cap [X > a]$ n'est autre que $[a < X \leq b]$. Pour simplifier le second, on remarque que $[X \leq a] \subset [X \leq b]$ car $a \leq b$: ainsi $[X \leq b] \cap [X \leq a] = [X \leq a]$. On obtient :

$$\mathbb{P}([X \leq b]) = \mathbb{P}([a < X \leq b]) + \mathbb{P}([X \leq a]).$$

Or $\mathbb{P}([X \leq b]) = F(b)$ et $\mathbb{P}([X \leq a]) = F(a)$, donc on conclut finalement par soustraction. □

C. Loi des variables aléatoires discrètes

Proposition. *Soit X une variable aléatoire réelle* discrète *définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Alors :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}([X \leq t]) = \sum_{x \in X(\Omega), x \leq t} \mathbb{P}([X = x]).$$

De plus, la fonction $x \mapsto \mathbb{P}([X = x])$ définie sur $X(\Omega)$ caractérise la loi de X.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On sait que les évènements atomiques $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements (qui est dénombrable) donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X \leq t]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X \leq t] \cap [X = x]).$$

Si $x > t$, les évènements $[X \leq t]$ et $[X = x]$ sont incompatibles, d'où $\mathbb{P}([X \leq t] \cap [X = x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Les seuls termes non nuls dans la somme correspondent donc à un indice x tel que $x \leq t$, auquel cas on a simplement $[X \leq t] \cap [X = x] = [X = x]$ car $[X = x] \subset [X \leq t]$. La formule annoncée en découle.

Remarquons maintenant que $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par $t \mapsto \mathbb{P}([X \leq t])$ est la fonction de répartition de X. D'après la formule établie, la fonction F est déterminée par les nombres $\mathbb{P}([X = x])$ pour $x \in X(\Omega)$. La conclusion en découle car on sait que la fonction de répartition F caractérise la loi de X. □

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant les arguments si besoin.