Colles de mathématiques en E1A

Séries et probabilités générales

Semaine 25 : du 24 au 28 avril

Note aux examinateurs (et aux élèves)

Cette semaine encore, les colles se concentreront sur la convergence des séries et le calcul de sommes.
Le chapitre de probabilités générales a été traité en cours, mais les travaux dirigés n'auront lieu que lundi matin.

1 Connaissances exigibles

1.1 Séries : tout le programme de la semaine 24

1.2 Probabilités générales

Cours :

— Rappel du formalisme des univers, issues et évènements. Union et intersection d'une famille d'évènements, lien avec les quantificateurs. Notion de tribu (ou σ-algèbre) sur un ensemble.

— Définition de (mesure de) probabilité et d'espace probabilisé. Théorème de la limite monotone et son corollaire. Notions d'évènement presque sûr (quasi-certain), d'évènement négligeable (quasi-impossible).

— Généralisation des systèmes complets d'évènements, de la formule des probabilités totales, de l'indépendance mutuelle d'une famille d'évènements, et des probabilités conditionnelles.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Formaliser un évènement à l'aide d'unions et d'intersections. Interpréter une union ou une intersection.

— Calculer la probabilité d'unions ou d'intersections infinies d'évènements par passage à la limite.

— Méthodes du chapitre sur les univers finis (probabilités totales, probabilités composées, Bayes, etc.)

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant les arguments si besoin.

A. Séries géométriques et séries géométriques « dérivées »

Proposition. *Les séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2},} \qquad \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.}$$

La démonstration a été vue en cours, mais n'est pas demandée ici.

Application. L'examinateur définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui peut s'écrire sous la forme $u_n = (an^2 + bn + c)\, q^n$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme (lorsqu'elle existe).

Exemples vus en TD : $\dfrac{7}{2^{2n-5}}$, $\dfrac{n}{2^n}$, n^2x^n, $\dfrac{n}{3^{2n+1}}$, $\dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$, $\dfrac{4n^2+5n}{5^n}$, $\dfrac{n-1}{3^n}$.

B. Séries exponentielles

Proposition. *Soit x un réel. La série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente. En particulier,* $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

De plus, la somme de la série est : $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.}$

La démonstration a été vue en cours, mais n'est pas demandée ici.

Application. L'examinateur définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui peut s'écrire sous la forme $u_n = (an^2 + bn + c)\,\frac{x^n}{n!}$. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exemples vus en TD : $\frac{3(-2)^n}{n!}$, $\frac{n+7}{2^n\, n!}$, $\frac{n(n-1)x^n}{n!}$, $\frac{n^2\, 8^n}{n!}$.

C. Évènements négligeables et évènements presque sûrs

Proposition. *Soit* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé.*

(i) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements négligeables. Alors* $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ *est un évènement négligeable.*

(ii) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'évènements presque sûrs. Alors* $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ *est un évènement presque sûr.*

Démonstration. Commençons par remarquer que A et B sont bien des évènements car $\mathscr{A}$ est une tribu. Nous allons commencer par prouver le (i), puis nous en déduirons le (ii) par passage au complémentaire.

(i) Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors d'après l'inégalité de Boole (admise, mais on pourra la redémontrer en exercice) :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n) = 0. \qquad \text{Or} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \in [0,1], \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = 0.$$

Par corollaire du théorème de la limite monotone, on obtient donc $\mathbb{P}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) = 0$.

(ii) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \overline{B_n}$. Alors (A_n) est bien une suite d'évènements (car $\mathscr{A}$ est une tribu) qui sont négligeables car : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(B_n) = 0$. En passant au complémentaire, on a par ailleurs :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right), \quad \text{donc } \mathbb{P}(B) = 1 - 0 = 1 \text{ d'après } (i).$$

□