Colles de mathématiques en E1A

Séries de réels

Semaine 24 : du 17 au 21 avril

Note aux examinateurs (et aux élèves) : à propos des équivalents

Il est important que les exercices testent la capacité des élèves à étudier rapidement la nature (convergence ou divergence) d'une série $\sum u_n$ à termes positifs en cherchant, dans des cas simples, un équivalent de u_n. La seule méthode qu'ils connaissent à ce stade est la plus élémentaire :

« factoriser par le(s) terme(s) dominant(s), qu'on identifie à l'aide des croissances comparées »

Ils factoriseront ainsi u_n sous la forme $u_n = v_n \times w_n$ où $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 1$ et ils pourront noter $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Aucune règle de calcul concernant les équivalents n'est exigible à ce stade : elles seront étudiées en deuxième année. Il en va de même de la notion de négligeabilité.

Connaissances exigibles

Cours :

— Vocabulaire : série, terme général, sommes partielles, série convergente, série divergente, somme d'une série. Divergence de la série harmonique. Combinaisons linéaires de séries convergentes. Séries télescopiques.

— Étude de convergence : critère de divergence grossière, convergence des séries à termes positifs *si et seulement si* la suite des sommes partielles est majorée, convergence absolue. Application aux séries de Riemann.

— Convergence et sommes des séries usuelles : séries géométriques et leurs « dérivées », séries exponentielles.

— Compléments : critères de comparaison pour la convergence des séries à termes positifs.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Exprimer les sommes partielles à partir du terme général, ou le terme général à partir des sommes partielles.

— Étudier la convergence d'une série à partir de la suite des sommes partielles.

— Déterminer si une série est grossièrement divergente.

— Reconnaître une série télescopique, déterminer sa nature, calculer sa somme (lorsqu'elle existe).

— Reconnaître une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et savoir si elle convergente ($\alpha > 1$) ou divergente ($\alpha \leqslant 1$).

— Reconnaître une série de la forme $\sum(an^2 + bn + c)q^n$, étudier sa convergence et calculer sa somme en l'exprimant comme une combinaison linéaire des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$.

— Reconnaître une série de la forme $\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$ où P est un polynôme de petit degré, justifier sa convergence et calculer sa somme en l'exprimant à l'aide de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ et de la règle de calcul des factorielles.

— Étudier la convergence d'une série à termes positifs par comparaison avec une série de référence (série de Riemann, géométrique, exponentielle ou télescopique), en établissant un équivalent ou des inégalités.

Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant les arguments si besoin.

A. Séries de Riemann et divergence de la série harmonique

Proposition. *Soit α un réel. La série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

La démonstration générale a été vue en cours, mais on se contentera ici du cas de la série harmonique.

Démonstration de la divergence pour $\alpha = 1$. Par définition, il s'agit de prouver que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles, définies par $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, ne converge pas. Nous allons en fait montrer, en comparant les sommes avec des intégrales, que cette suite diverge vers $+\infty$.

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que :

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, \qquad \text{où l'intégrale de gauche vaut simplement} \qquad \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n}[(n+1)-n] = \frac{1}{n}.$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités obtenues pour $n \in [\![1, N]\!]$, on obtient alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

  De plus, d'après les relations de Chasles :

$$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \Big[\ln(|x|)\Big]_1^{N+1} = \ln(N+1). \qquad \text{Ainsi :} \quad S_N \geqslant \ln(N+1).$$

- Puisque $\ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, on en déduit enfin, par théorème de comparaison, que $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.

□

Question réflexe : pour quels α la série est-elle grossièrement divergente ?

B. Séries géométriques et séries géométriques « dérivées »

Proposition. *Les séries* $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ *et* $\sum n(n-1)q^{n-2}$ *sont convergentes si et seulement si* $|q| < 1$, *et dans ce cas :*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2},} \qquad \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.}$$

La démonstration a été vue en cours, mais n'est pas demandée ici.

Application. L'examinateur définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui peut s'écrire sous la forme $u_n = (an^2+bn+c)\,q^n$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme (lorsqu'elle existe).

Exemples vus en TD : $\dfrac{7}{2^{2n-5}}$, $\dfrac{n}{2^n}$, n^2x^n, $\dfrac{n}{3^{2n+1}}$, $\dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}$, $\dfrac{4n^2+5n}{5^n}$, $\dfrac{n-1}{3^n}$.

C. Séries exponentielles

Proposition. *Soit x un réel. La série* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ *est absolument convergente. En particulier,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

De plus, la somme de la série est : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.}$

La démonstration a été vue en cours, mais n'est pas demandée ici.

Application. L'examinateur définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui peut s'écrire sous la forme $u_n = (an^2+bn+c)\,\dfrac{x^n}{n!}$. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exemples vus en TD : $\dfrac{3(-2)^n}{n!}$, $\dfrac{n+7}{2^n\,n!}$, $\dfrac{n(n-1)x^n}{n!}$, $\dfrac{n^2\,8^n}{n!}$.