Colles de mathématiques en E1A

Intégration, séries

Semaine 23 : du 27 au 31 mars

1 Connaissances exigibles

1.1 Intégration sur un segment

Cours :

- Notion de primitive sur un intervalle, « unicité » seulement à une constante près. Définition de l'intégrale. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.
- Propriétés fondamentales de l'intégration : relations de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Extension de l'intégration aux fonctions continues par morceaux.
- Méthodes de calcul : intégration par parties, changement de variable, primitives à vue.
- Interprétation en terme d'aire sous la courbe. Sommes de Riemann. Comparaison somme/intégrale pour les fonctions continues et décroissantes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Dériver une fonction de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$.
- Déterminer une « primitive à vue » pour calculer une intégrale.
- Utiliser les propriétés de positivité et de croissance pour encadrer des intégrales.
- Calculer une intégrale avec la méthode de l'intégration par parties.
- Appliquer un changement de variable (donné en indication) à une intégrale.
- Reconnaître une somme de Riemann et déterminer sa limite.

1.2 Séries

Cours :

- Vocabulaire : série, terme général, sommes partielles, série convergente, série divergente, somme d'une série. Divergence de la série harmonique. Combinaisons linéaires de séries convergentes. Séries télescopiques.
- Critères d'étude de convergence : divergence grossière, cas des séries à termes positifs (convergence *ssi* la suite des sommes partielles est bornée), convergence absolue. Application aux séries de Riemann.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Exprimer les sommes partielles à partir du terme général, ou le terme général à partir des sommes partielles.
- Étudier la convergence d'une série à partir de la suite des sommes partielles.
- Déterminer si une série est grossièrement divergente.
- Reconnaître une série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et savoir si elle convergente ($\alpha > 1$) ou divergente ($\alpha \leq 1$).

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Intégration par parties

Proposition. *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Application. Montrer que la suite de réels (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} n \times I_n = e$.

Démonstration. Il s'agit de refaire l'exercice XIII de la feuille « intégration », dont la correction détaillée a été vue en cours. Rappelons les deux étapes préliminaires (à détailler) :

- On démontre que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par encadrement de l'intégrale.
- En intégrant par parties, on obtient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

□

2.2 Changement de variable

Proposition. *Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$ et soit f une fonction continue sur le segment image $\varphi([a,b])$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Application. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ avec le changement de variable « $u = e^x$ ».

Démonstration. Il s'agit de refaire le *a)* de l'exercice VII de la feuille « intégration », dont la correction détaillée a été vue en cours. Rappelons les deux étapes principales (à détailler) :

- On applique la méthode du changement de variable avec $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ pour obtenir $I = \displaystyle\int_1^e \frac{du}{u(u+1)}$.
- On décompose $\dfrac{1}{u(u+1)}$ en éléments simples pour calculer cette dernière intégrale.

□

2.3 Séries de Riemann et divergence de la série harmonique

Proposition. *Soit α un réel. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration pour la série harmonique : cas $\alpha = 1$. Par définition, il s'agit de prouver que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles définies par $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ ne converge pas. Nous allons en fait montrer, en comparant les sommes avec des intégrales, que cette suite diverge vers $+\infty$.

- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que :

  $$\int_n^{n+1} \frac{dx}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, \qquad \text{où l'intégrale de gauche vaut simplement} \qquad \int_n^{n+1} \frac{dx}{n} = \frac{1}{n}[(n+1)-n] = \frac{1}{n}.$$

- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités obtenues pour $n \in [\![1, N]\!]$, on obtient alors : $\displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$.

  De plus, d'après les relations de Chasles :

  $$\sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \Big[\ln(|x|)\Big]_1^{N+1} = \ln(N+1). \qquad \text{Ainsi :} \quad S_N \geq \ln(N+1).$$

- Puisque $\ln(N+1) \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$, on en déduit enfin que $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$ par le théorème de comparaison.

□

Question réflexe : pour quels α la série est-elle grossièrement divergente ?