Colles de mathématiques en E1A

Convexité, intégration

Semaine 22 : du 20 au 24 mars

1 Connaissances exigibles

1.1 Convexité

Cours : Convexité et concavité, point d'inflexion. Définitions géométriques (comparaison de moyennes pondérées). Critères de convexité pour les fonctions C^1 et les fonctions C^2, position par rapport aux tangentes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Étudier la convexité et les points d'inflexion d'une fonction.
- Utiliser la convexité ou la concavité d'une fonction pour démontrer une inégalité du type « comparaison de moyennes pondérées » ou « position par rapport à une tangente ».

1.2 Intégration sur un segment

Cours :

- Notion de primitive sur un intervalle, « unicité » seulement à une constante près. Définition de l'intégrale. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.
- Propriétés fondamentales de l'intégration : relations de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Extension de l'intégration aux fonctions continues par morceaux.
- Méthodes de calcul : intégration par parties, changement de variable, primitives à vue.
- Interprétation en terme d'aire sous la courbe. Sommes de Riemann. Comparaison somme/intégrale pour les fonctions continues et décroissantes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Dériver une fonction de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$.
- Déterminer une « primitive à vue » pour calculer une intégrale.
- Utiliser les propriétés de positivité et de croissance pour encadrer des intégrales.
- Calculer une intégrale avec la méthode de l'intégration par parties.
- Appliquer un changement de variable (donné en indication) à une intégrale.
- Reconnaître une somme de Riemann et déterminer sa limite.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Critère de convexité pour les fonction C^1

Proposition. *Soit f une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle I. Les asssertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la fonction f est convexe sur I,

(ii) la fonction f' est croissante sur I,

(iii) pour tout $x_0 \in I$, la courbe de f est au dessus de sa tangente en x_0 : $\forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Démonstration. On admet que $(i) \iff (ii)$. Montrons que $(ii) \iff (iii)$ par double implication.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* On suppose que f' est croissante. Fixons $x_0 \in I$ et considérons la fonction

$$\varphi : x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Alors φ est définie et dérivable sur I, de dérivée $\varphi' : x \mapsto f'(x) - f'(x_0)$. Par hypothèse, on a donc $\varphi'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$ et $\varphi'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$. On en déduit les variations de φ, puis le fait $\varphi(x_0)$ est un minimum de φ sur l'intervalle I. Or $\varphi(x_0) = 0$, donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$. Ceci démontre l'inégalité annoncé.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*. On suppose que f est au dessus de ses tangentes. Montrons que f' est croissante. Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 < x_2$. Puisque $f(x_2)$ est au-dessus de la tangente en x_1 et $f(x_1)$ est au-dessus de la tangente en x_2,

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad \text{et} \qquad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

En combinant ces inégalités et en divisant par $x_2 - x_1$ qui strictement positif, on obtient alors l'encadrement :

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \qquad \text{d'où} \quad f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

□

2.2 Intégration par parties

Proposition. *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$. Alors*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Application. Montrer que la suite de réels (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} n \times I_n = e$.

Démonstration. Il s'agit de refaire l'exercice XIII de la feuille « intégration », dont la correction détaillée a été vue en cours. Rappelons les deux étapes préliminaires (à détailler) :

- On démontre que $I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par encadrement de l'intégrale.
- En intégrant par parties, on obtient la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

□

2.3 Changement de variable

Proposition. *Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ et soit f une fonction continue sur le segment image $\varphi([a, b])$. Alors*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

Application. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ avec le changement de variable « $u = e^x$ ».

Démonstration. Il s'agit de refaire le *a)* de l'exercice VII de la feuille « intégration », dont la correction détaillée a été vue en cours. Rappelons les deux étapes principales (à détailler) :

- On applique la méthode du changement de variable avec $\varphi : u \mapsto \ln(u)$ pour obtenir $I = \displaystyle\int_1^e \frac{du}{u(u+1)}$.
- On décompose $\dfrac{1}{u(u+1)}$ en éléments simples pour calculer cette dernière intégrale.

□

Primitives à connaître par cœur, primitives à vue

On pourra agrémenter la question de cours de quelques primitives. Par exemple (α est un réel) :

$$x \mapsto \ln(x), \quad x \mapsto x^\alpha, \quad x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad x \mapsto e^{u(x)}u'(x), \quad x \mapsto -\frac{u'(x)}{u(x)^2}, \quad x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}, \quad \text{etc.}$$