Colles de mathématiques en E1A

Dérivation, convexité

Semaine 21 : du 13 au 17 mars

Seront à l'honneur cette semaine les calculs de dérivées composées et les diverses applications de la dérivation à l'étude des fonctions et des inégalités, notamment la convexité et les suites récurrentes.

Attention : le théorème de Rolle et le *théorème* des accroissements finis ne sont pas officiellement au programme, de même que la formule de Leibniz (dérivées successives d'un produit de deux fonctions).

1 Connaissances exigibles

1.1 Dérivation

Cours :

— Taux d'accroissement. Dérivabilité et notation $f'(x_0)$. Domaine de dérivabilité, fonction dérivée. Dérivabilité à droite et à gauche. Développement limité à l'ordre 1. Tangente à la courbe d'une fonction en un point où elle est dérivable. Notions de tangente verticale et de demi-tangentes (à droite et à gauche).

— Règles de calcul des dérivées pour les opérations algébriques : somme, différence, produit, quotient. Dérivation des fonctions composées, des fonctions réciproques.

— Condition nécessaire d'extremum local. Théorème de Rolle et théorèmes des accroissements finis (culture). Lien entre signe de la dérivée sur un intervalle et variations. Inégalités des accroissements finis et applications.

— Dérivées successives. Fonctions n fois dérivables, fonctions de classe C^n, de classe C^∞. Opérations.

— Convexité et concavité, point d'inflexion. Définitions géométriques (comparaison de moyennes pondérées). Critères de convexité pour les fonctions C^1 et les fonctions C^2, position par rapport aux tangentes.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point de son domaine de définition, par un calcul de limite.

— Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations algébriques à partir de fonctions usuelles.

— Calculer la dérivée d'une fonction composée ou d'une fonction réciproque.

— Appliquer les inégalités des accroissements finis pour encadrer $f(x) - f(y)$, en particulier dans le cas d'une suite définie par la relation de récurrence « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ ».

— Faire une étude de fonction complète : domaine de définition et continuité, limites aux bornes du domaine et prolongement par continuité, domaine de dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée, variations, croquis.

— Introduire une étude de variations pour démontrer une inégalité, calculer un extremum, etc.

— Calculer par récurrence les dérivées successives d'une fonction. Exemples de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$.

— Étudier la convexité et les points d'inflexion d'une fonction.

— Utiliser la convexité ou la concavité d'une fonction pour démontrer une inégalité du type « comparaison de moyennes pondérées » ou « position par rapport à une tangente ».

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur : cette semaine, on pourra penser par exemple à la définition générale de la convexité et de la concavité.

Rappelons également qu'il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire en détaillant les arguments, de manière à pouvoir les adapter à d'autres situations.

2.1 Dérivation composée

Proposition. *Soient $u : A \to \mathbb{R}$ et $v : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $u(A) \subset B$. Soit $x_0 \in A$. Si u est dérivable en x_0 et v est dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et $(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$.*

Démonstration. Notons $y_0 = u(x_0)$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ et $\eta : B \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in A,\ u(x) - u(x_0) = [u'(x_0) + \varepsilon(x)](x - x_0), \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$
$$\forall y \in B,\ v(y) - v(y_0) = [v'(y_0) + \eta(y)](y - y_0), \qquad \lim_{y \to y_0} \eta(y) = 0.$$

En prenant $y = u(x)$, et en se rappelant que $y_0 = u(x_0)$, on obtient alors :

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = [v'(y_0) + \eta(u(x))](u(x) - u(x_0)) = [v'(y_0) + \eta(u(x))][u'(x_0) + \varepsilon(x)](x - x_0)$$

Or, lorsque x tend vers x_0 :
— $u(x)$ tend vers $y_0 = u(x_0)$, car u est continue (puisque dérivable) en x_0 ;
— donc $\eta(u(x))$ tend vers 0, par composition des limites ; de plus $\varepsilon(x)$ tend vers 0 ;
— donc $[v'(y_0) + \eta(u(x))][u'(x_0) + \varepsilon(x)]$ tend vers $v'(y_0)u'(x_0)$ par opérations sur les limites.

Autrement dit : le taux d'accroissement $\dfrac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0}$ tend vers $v'(y_0)u'(x_0) = v'(u(x_0))u'(x_0)$. □

2.2 Condition nécessaire d'extremum local

Proposition. *Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert, $x_0 \in]a, b[$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Si $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum de f sur $]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Rappelons que $f'(x_0)$ est la limite du taux d'accroissement $\tau : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour $x \to x_0$.

L'idée de la preuve est de remarquer que $f'(x_0)$ est à la fois positif et négatif, en étudiant le signe de τ.

Supposons que $f(x_0)$ est un maximum de f. Alors pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et donc :
— Pour tout $x > x_0$, $\tau(x) \leq 0$. En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \tau(x) \leq 0$.
— Pour tout $x < x_0$, $\tau(x) \geq 0$. En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \tau(x) \geq 0$.

Ceci montre que $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, d'où finalement $f'(x_0) = 0$. □

Questions possibles :
— Comment traiter le cas où $f(x_0)$ est un minimum ?
— Si $f'(x_0) = 0$, est-il toujours vrai que $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum ?
— Le résultat est-il toujours vrai si l'intervalle n'est pas ouvert ?

2.3 Critère de convexité pour les fonctions C^1

Proposition. *Soit f une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) la fonction f est convexe sur I,
(ii) la fonction f' est croissante sur I,
(iii) la courbe de f est au-dessus de ses tangentes : $\forall x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Démonstration. On admet que $(i) \iff (ii)$. Montrons que $(ii) \iff (iii)$ par double implication.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. On suppose que f' est croissante. Fixons $x_0 \in I$ et notons $\varphi : x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Alors φ est définie et dérivable sur I, de dérivée $\varphi' : x \mapsto f'(x) - f'(x_0)$. Par hypothèse, on a donc $\varphi'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$ et $\varphi'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$. On en déduit les variations de f, puis le fait $\varphi(x_0)$ est un minimum de φ sur l'intervalle I (tableaux). Or $\varphi(x_0) = 0$, donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$. Ceci démontre l'inégalité annoncée.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. On suppose que f est au-dessus de ses tangentes. Montrons que f' est croissante. Soient $(x_1, x_2) \in I^2$ tels que $x_1 < x_2$. Puisque $f(x_2)$ est au-dessus de la tangente en x_1 et $f(x_1)$ est au-dessus de la tangente en x_2,

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad \text{et} \qquad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

En combinant ces inégalités et en divisant par $x_2 - x_1$ qui strictement positif, on obtient alors l'encadrement :

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \qquad \text{d'où} \quad f'(x_1) \leq f'(x_2).$$

□