Colles de mathématiques en E1A

Inversion de matrices, dérivation

Semaine 20 : du 6 au 10 mars

Attention : le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont hors-programme !

1 Connaissances exigibles

1.1 Calcul matriciel

Se reporter au programme précédent.

1.2 Dérivation

Cours :

- Taux d'accroissement. Dérivabilité et notation $f'(x_0)$. Domaine de dérivabilité, fonction dérivée. Dérivabilité à droite et à gauche. Développement limité à l'ordre 1. Tangente à la courbe d'une fonction en un point où elle est dérivable. Notions de tangente verticale et de demi-tangentes (à droite et à gauche).
- Règles de calcul des dérivées pour les opérations algébriques : somme, différence, produit, quotient. Dérivation des fonctions composées, des fonctions réciproques.
- Condition nécessaire d'extremum local. Théorème de Rolle et théorèmes des accroissements finis (culture). Lien entre signe de la dérivée sur un intervalle et variations. Inégalités des accroissements finis.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point de son domaine de définition, par un calcul de limite.
- Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations algébriques à partir de fonctions usuelles.
- Calculer la dérivée d'une fonction composée ou d'une fonction réciproque.
- Dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable sur un intervalle.
- Introduire une étude de variations pour démontrer un inégalité, calculer un extremum, etc.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Critère d'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 selon le déterminant

Proposition. *Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

Démonstration. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\delta = ad - bc$ son déterminant. Soit $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. La démonstration repose sur le fait que cette matrice vérifie $AB = \delta I_2$ (calcul à détailler au tableau). On démontre maintenant l'équivalence par double implicitation :

($\Leftarrow$) Supposons $\delta \neq 0$ et montrons que A est inversible. Puisque $\delta \neq 0$, la matrice $\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}B$ est bien définie, et d'après les règles de calcul du produit matriciel : $A\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}AB = \frac{1}{\delta}\delta I_2 = I_2$. D'après un théorème (admis) du cours, ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \widetilde{B}$.

($\Rightarrow$) Supposons que A est inversible et montrons que $\delta \neq 0$. Procédons par l'absude en supposant que $\delta = 0$. Alors $AB = 0I_2$ est la matrice nulle. Or $B = A^{-1}AB$, donc $B = 0$. Ainsi $a = b = c = d = 0$, donc on a aussi $A = 0$. Ceci est absurde car $A^{-1}A = I_2$, ce qui prouve que $\delta \neq 0$. □

2.2 Développement limité à l'ordre 1

Proposition. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, x_0 un élément du domaine $D \subset \mathbb{R}$, et λ un réel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lambda$.

(ii) Il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D,\ f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0).$$

Démonstration. Procédons par double implication.
$(ii) \Rightarrow (i)$: On suppose qu'il existe une telle fonction ε. Alors pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lambda + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda + 0 = \lambda \quad \text{(par somme de limites).}$$

Par définition de la dérivabilité, ceci prouve que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \lambda$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: On suppose que f est dérivable en x_0 et que $\lambda = f'(x_0)$. Autrement dit : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$.
En posant $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda$ pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$, on définit donc bien $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \lambda - \lambda = 0$ (par différence de limites).
Soit maintenant $x \in D$. On obtient $\varepsilon(x)(x - x_0) = (f(x) - f(x_0)) - \lambda\,(x - x_0)$ par définition de ε (en traitant à part le cas $x = x_0$), d'où finalement : $f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$. □

2.3 Dérivation composée

Proposition. *Soient $u : A \to \mathbb{R}$ et $v : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $u(A) \subset B$. Soit $x_0 \in A$. Si u est dérivable en x_0 et v est dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en x_0 et $(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$.*

Démonstration. Notons $y_0 = u(x_0)$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon : A \to \mathbb{R}$ et $\eta : B \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned} &\forall x \in A,\ u(x) - u(x_0) = [u'(x_0) + \varepsilon(x)](x - x_0), && \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \\ &\forall y \in B,\ v(y) - v(y_0) = [v'(y_0) + \eta(y)](y - y_0), && \lim_{y \to y_0} \eta(y) = 0. \end{aligned}$$

En prenant $y = u(x)$, et en se rappelant que $y_0 = u(x_0)$, on obtient alors :

$$v(u(x)) - v(u(x_0)) = [v'(y_0) + \eta(u(x))](u(x) - u(x_0)) = [v'(y_0) + \eta(u(x))][u'(x_0) + \varepsilon(x)](x - x_0)$$

Or, lorsque x tend vers x_0 :
— $u(x)$ tend vers $y_0 = u(x_0)$, car u est continue (puisque dérivable) en x_0 ;
— donc $\eta(u(x))$ tend vers 0, par composition des limites ; de plus $\varepsilon(x)$ tend vers 0 ;
— donc $[v'(y_0) + \eta(u(x))][u'(x_0) + \varepsilon(x)]$ tend vers $v'(y_0)u'(x_0)$ par opérations sur les limites.

Autrement dit : le taux d'accroissement $\dfrac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0}$ tend vers $v'(y_0)u'(x_0) = v'(u(x_0))u'(x_0)$. □

2.4 Condition nécessaire d'extremum local

Proposition. *Soient $]a, b[$ un intervalle ouvert, $x_0 \in]a, b[$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Si $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum de f sur $]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Rappelons que $f'(x_0)$ est la limite du taux d'accroissement $\tau : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pour $x \to x_0$.
L'idée de la preuve est de remarquer que $f'(x_0)$ est à la fois positif et négatif, en étudiant le signe de τ.
Supposons que $f(x_0)$ est un maximum de f. Alors pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et donc :
— Pour tout $x > x_0$, $\tau(x) \leq 0$. En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \tau(x) \leq 0$.
— Pour tout $x < x_0$, $\tau(x) \geq 0$. En passant à la limite, on obtient $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \tau(x) \geq 0$.

Ceci montre que $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, d'où finalement $f'(x_0) = 0$. □

Questions possibles :
— Comment traiter le cas où $f(x_0)$ est un minimum ?
— Si $f'(x_0) = 0$, est-il toujours vrai que $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum ?
— Le résultat est-il toujours vrai si l'intervalle n'est pas ouvert ?