Colles de mathématiques en E1A

Langage, raisonnement, équations et polynômes

du 19 au 23 septembre

1 Commentaires généraux

- La colle commence par une question de cours qui conditionne la note finale :
  - Si la question de cours n'est pas sue : note < 10.
  - Si la question de cours est sue : note ≥ 10.
- On sera très attentif à la rigueur de la rédaction.
  - Introduction des variables : *soit* (preuve de $\forall$), *posons* (preuve de $\exists$).
  - Démonstration d'une implication : *supposons*.
    Ne surtout pas confondre la condition suffisante et la condition nécessaire.
  - Démonstration d'une équivalence : double implication.
  - Interdiction d'utiliser les symboles mathématiques comme des abréviations.
  - Respect de l'ordre des mots et utilisation des parenthèses en cas d'ambiguïté.

2 Questions de cours

- Règles de négation : non, pour tout, il existe, implique, équivaut, et, ou.
- Factorisations remarquables : pour tous x et y réels (ou des polynômes),

$$\begin{aligned}
x^2 + 2xy + y^2 &= (x+y)^2, \\
x^2 - 2xy + y^2 &= (x-y)^2, \\
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 &= (x+y)^3, \\
x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 &= (x-y)^3, \\
x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y), \\
x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2), \\
x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2), \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).
\end{aligned}$$

- Étude générale des équations du second degré dans $\mathbb{R}$ *avec démonstrations* :
  - Relation $4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 - (b^2-4ac)$.
  - Résolution du cas $\Delta < 0$.
  - Factorisation et résolution dans le cas $\Delta = 0$.
  - Factorisation et résolution dans le cas $\Delta > 0$.
- Critère d'identification de deux polynômes.
- Degré de la somme de deux polynômes, degré du produit de deux polynômes.
- Lien entre factorisation et racines d'un polynôme.

3 Méthodes de résolution d'équations

- Utilisation de factorisations.
- Analyse-synthèse.
- Changement d'inconnue.

4 Extraits du programme officiel

Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Fonctions polynomiales, polynômes

Degré, somme et produit de polynômes.

Par convention, $\deg 0 = -\infty$.
La construction des polynômes formels n'est pas au programme, on pourra identifier polynômes et fonctions polynomiales.

Ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, ensembles $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n.

Racines d'un polynôme. Factorisation par $(X-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.

Application : un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul.
Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$

Trinômes du second degré.

Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbb{R}$.