Colles de mathématiques en E1A

Calcul matriciel, dérivabilité

Semaine 19 : du 27 février au 3 mars

L'essentiel de la colle devra se concenter sur le calcul matriciel cette semaine (ce qui peut évidemment amener des résolutions de systèmes linéaires). Tout le cours et toutes les méthodes sont au programme.
Nous venons de commencer la dérivation et très peu d'exercices ont été traités sur le sujet. La dérivation des fonctions composées n'apparaitra que la semaine prochaine.

1 Connaissances exigibles

1.1 Calcul matriciel

Cours :

— Matrice, lignes, colonnes, coefficients. Matrice carrée. Matrice nulle, identité, diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure. Transposition, matrice symétrique.

— Opérations vectorielles : somme et multiplication par un réel, règles de calcul. Produit matriciel, règles de calcul. Transposée d'un produit. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures. Représentation matricielle d'un système linéaire.

— Puissances d'une matrice carrée. Règles de calcul sur les puissances. Formule du binôme de Newton et factorisation remarquable $A^k - B^k = (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + B^{k-1})$ avec condition de commutativité.

— Inversibilité d'une matrice carrée. Règles de calcul pour l'inverse. Critères pratiques pour les matrices triangulaires, les matrices diagonales et les matrices de taille 2. Pivot de Gauss pour le cas général.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Vérifier si une opération matricielle (somme ou produit) est bien définie à partir des nombres de lignes et de colonnes. Prévoir le nombre de lignes et de colonnes du résultat.

— Calculer explicitement les coefficients d'un produit de matrices ou d'une petite puissance (carré, cube, etc.).

— Simplifier des expressions algébriques matricielles à l'aide des règles de calcul.

— Étudier l'inversibilité d'une matrice A à partir d'une relation de la forme $AB = C$ ou $BA = C$.

— Étudier l'inversibilité d'une matrice A avec l'algorithme du pivot de Gauss.

— Calculer les puissances d'une matrice par récurrence ou par la formule du binôme. Application aux suites.

1.2 Dérivation

Cours :

— Taux d'accroissement. Dérivabilité et notation $f'(x_0)$. Domaine de dérivabilité, fonction dérivée. Dérivabilité à droite et à gauche. Développement limité à l'ordre 1. Tangente à la courbe d'une fonction en un point où elle est dérivable. Notions de tangente verticale et de demi-tangentes (à droite et à gauche).

— Règles de calcul des dérivées pour les opérations algébriques : somme, différence, produit, quotient.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point de son domaine de définition, par un calcul de limite.

— Calculer la dérivée d'une fonction obtenue par opérations algébriques à partir de fonctions usuelles.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Règles de calcul pour l'inversion matricielle

Proposition. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ *deux matrices* inversibles*. Alors*

(i) A^{-1} *est inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) AB *est inversible et* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) ${}^tA$ *est inversible et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration. (i) Il s'agit de vérifier que $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$. Ceci est trivialement vrai car, puisque A^{-1} est l'inverse de A, on a $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$.

(ii) Il s'agit de vérifier que la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ satisfait $(AB)C = I_n$ et $C(AB) = I_n$. Par associativité du produit matriciel, on sait que $(AB)C = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et on obtient de même $C(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

(iii) Il s'agit de vérifier que la matrice $D = {}^t(A^{-1})$ satisfait ${}^tAD = I_n$ et $D{}^tA = I_n$. Or, par transposée d'un produit, on sait que ${}^tAD = {}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ et de même $D{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$.

□

2.2 Critère d'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 selon le déterminant

Proposition. *Soient* $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$*. La matrice* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$.

Démonstration. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\delta = ad - bc$ son déterminant. Soit $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. La démonstration repose sur le fait que cette matrice vérifie $AB = \delta I_2$ (calcul à détailler au tableau). On démontre maintenant l'équivalence par double implicitation :

($\Leftarrow$) Supposons $\delta \neq 0$ et montrons que A est inversible. Puisque $\delta \neq 0$, la matrice $\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}B$ est bien définie, et d'après les règles de calcul du produit matriciel : $A\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}AB = \frac{1}{\delta}\delta I_2 = I_2$. D'après un théorème (admis) du cours, ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \widetilde{B}$.

($\Rightarrow$) Supposons que A est inversible et montrons que $\delta \neq 0$. Procédons par l'absude en supposant que $\delta = 0$. Alors $AB = 0I_2$ est la matrice nulle. Or $B = A^{-1}AB$, donc $B = 0$. Ainsi $a = b = c = d = 0$, donc on a aussi $A = 0$. Ceci est absurde car $A^{-1}A = I_2$, ce qui prouve que $\delta \neq 0$. □

2.3 Développement limité à l'ordre 1

Proposition. *Soient* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction,* x_0 *un élément du domaine* $D \subset \mathbb{R}$*, et* λ *un réel. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction f *est dérivable en* x_0 *et* $f'(x_0) = \lambda$.

(ii) Il existe une fonction $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in D,\ f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0).$$

Démonstration. Procédons par double implication.
(ii) $\Rightarrow$ *(i)* : On suppose qu'il existe une telle fonction ε. Alors pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)}{x - x_0} = \lambda + \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda + 0 = \lambda \quad \text{(par somme de limites).}$$

Par définition de la dérivabilité, ceci prouve que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \lambda$.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : On suppose que f est dérivable en x_0 et que $\lambda = f'(x_0)$. Autrement dit : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$.
En posant $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lambda$ pour tout $x \in D \setminus \{x_0\}$, on définit donc bien $\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \lambda - \lambda = 0$ (par différence de limites).
Soit maintenant $x \in D$. En distinguant le cas $x = x_0$, on obtient $\varepsilon(x)(x - x_0) = (f(x) - f(x_0)) - \lambda\,(x - x_0)$ par définition de ε, d'où finalement : $f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$. □