Colles de mathématiques en E1A

Étude globale des fonctions, systèmes linéaires, calcul matriciel

Semaine 18 : du 20 au 24 février

- Pour l'étude globale des fonctions, seul le théorème de la bijection reste au programme.
- Il est essentiel que chaque élève résolve au moins un système linéaire cette semaine.
- Pour le calcul matriciel, il n'y aura pas encore d'exercices sur l'inversibilité cette semaine.

1 Connaissances exigibles

1.1 Étude globale des fonctions

Cours :

— Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue. Théorème de la bijection, dans sa version équation et dans sa version complète (avec les propriétés de l'application réciproque). Étude de suites définies implicitement.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone.

— Établir l'existence et l'unicité d'un réel x tel que $f(x) = y$ en utilisant le théorème de la bijection.

— Utiliser les propriétés de la réciproque d'une bijection continue et strictement monotone.

1.2 Systèmes linéaires

Cours :

— Coefficients, inconnues, second membre. Solution. Système homogène. Système de Cramer. Équivalence.

— Inversibilité des opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $L_i \leftrightarrow L_j$ lorsque $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$. Algorithme du pivot de Gauss pour réduire un système quelconque à une forme échelonnée (en « trapèze »).

— Conditions de compatibilité. Notion de rang d'un système et caractérisation des systèmes de Cramer. Paramétrisation de l'ensemble des solutions dans le cas où le rang est plus petit que le nombre d'inconnues.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Résoudre un système linéaire quelconque avec l'algorithme du pivot de Gauss.

— Paramétrer l'ensemble des solutions lorsque cet ensemble est infini.

— Résoudre un système à paramètre(s) en faisant des disjonctions de cas.

1.3 Calcul matriciel

Cours :

— Matrice, lignes, colonnes, coefficients. Matrice carrée. Matrice nulle, identité, diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure. Transposition, matrice symétrique.

— Opérations vectorielles : somme et multiplication par un réel, règles de calcul. Produit matriciel, règles de calcul. Transposée d'un produit. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures. Représentation matricielle d'un système linéaire.

— Puissances d'une matrice carrée. Règles de calcul sur les puissances. Formule du binôme de Newton et factorisation remarquable $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \cdots + B^{k-1})$ avec condition de commutativité.

— Inversibilité d'une matrice carrée. Règles de calcul pour l'inverse. Critères pratiques pour les matrices triangulaires, les matrices diagonales et les matrices de taille 2. Pivot de Gauss pour le cas général.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Vérifier si une opération matricielle (somme ou produit) est bien définie à partir des nombres de lignes et de colonnes. Prévoir le nombre de lignes et de colonnes du résultat.

— Calculer explicitement les coefficients d'un produit de matrices ou d'une petite puissance (carré, cube, etc.).

— Simplifier des expressions algébriques matricielles à l'aide des règles de calcul.

— Étudier l'inversibilité d'une matrice A à partir d'une relation de la forme $AB = C$ ou $BA = C$.

— Étudier l'inversibilité d'une matrice A avec l'algorithme du pivot de Gauss.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et de savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Théorème de la bijection

Proposition. *Soit f une fonction définie sur un* intervalle I, continue *sur I,* strictement monotone *sur I.*

(i) L'ensemble-image $J = f(I)$ est un intervalle.

(ii) L'application $\phi : I \to J$ définie par $x \mapsto f(x)$ est une bijection.

(iii) La bijection réciproque $\phi^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même sens que f.

Démonstration. (i) La fonction f étant continue sur I, qui est un intervalle, on sait que l'ensemble-image $f(I)$ est un intervalle d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

(ii) *Montrons que ϕ est une surjection.* Soit $y \in J$. Par définition de l'ensemble-image $J = f(I)$, il exise $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit, $\phi(x) = f(x) = y$.
Montrons que ϕ est une injection. L'application ϕ est strictement monotone car elle coïncide sur I avec la fonction f, qui elle-même est strictement monotone. On a donc ϕ injective.
Conclusion : l'application ϕ est surjective et injective, donc elle est bijective.

(iii) La continuité est admise.
Pour la monotonie, on va supposer f (et ϕ a fortiori) strictement croissante. Soient alors $(y_1, y_2) \in J^2$ tels que $y_1 < y_2$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\phi^{-1}(y_1) \geq \phi^{-1}(y_2)$. Alors $\phi(\phi^{-1}(y_1)) \geq \phi(\phi^{-1}(y_2))$ par croissance de ϕ. Mais alors $y_1 \geq y_2$ car $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_J$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $\phi^{-1}(y_1) < \phi^{-1}(y_2)$. Le cas strictement décroissant est similaire. □

2.2 Règles de calcul pour le produit matriciel

Proposition. *Soient $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^4$, $(A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2$, $(B, B') \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.*

(i) Associativité : $A(BC) = (AB)C$.

(ii) Éléments neutres : $I_n A = A$ et $AI_p = A$.

(iii) Distributivité : $(A + A')B = AB + A'B$ et $A(B + B') = AB + AB'$.

(iv) Commutativité du produit avec un réel : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Démonstration. Le colleur choisit **un seul** des deux premiers items pour la démonstration.

(i) D'après les formats des matrices, $BC \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $A(BC) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ sont bien définies. De même $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $(AB)C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ sont bien définies. En particulier, $A(BC)$ et $(AB)C$ ont le même format. Il reste à montrer qu'elles ont les mêmes coefficients. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, r]\!]$. Alors :

$$(A(BC))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \sum_{\ell=1}^{q} B_{k,\ell}C_{\ell,j} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} A_{i,k}B_{k,\ell}C_{\ell,j},$$

et en utilisant le théorème d'interversion des sommes doubles à l'étape $(*)$:

$$((AB)C)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{q}(AB)_{i,\ell}C_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,\ell}C_{\ell,j} \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{q} A_{i,k}B_{k,\ell}C_{\ell,j} = (A(BC))_{i,j}.$$

(ii) Puisque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, les produits I_nA et AI_p sont bien définis et appartiennent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. Alors, en exprimant les coefficients de la matrice identité I_n avec une indicatrice,

$$(I_nA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\mathbf{1}_{\{k=i\}} = A_{i,j} \qquad \text{car} \quad (I_n)_{i,k} = \mathbf{1}_{\{k=i\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}.$$

On procède de même pour AI_p : $(AI_p)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}(I_p)_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}\mathbf{1}_{\{k=j\}} = A_{i,j}$.

Ces relations étant établies quels que soient i et j, on déduit $I_nA = A$ et $AI_p = A$. □

2.3 Règles de calcul pour l'inverse

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices* inversibles. *Alors*

(i) A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration. (i) Il s'agit de vérifier que $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$. Ceci est trivialement vrai car, puisque A^{-1} est l'inverse de A, on a $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$.

(ii) Il s'agit de vérifier que la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ satisfait $(AB)C = I_n$ et $C(AB) = I_n$. Par associativité du produit matriciel, on sait que $(AB)C = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et on obtient de même $C(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

(iii) Il s'agit de vérifier que la matrice $D = {}^t(A^{-1})$ satisfait ${}^tAD = I_n$ et $D{}^tA = I_n$. Or, par transposée d'un produit, on sait que ${}^tAD = {}^tA{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ et de même $D{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$.

□

Aperçu : critère d'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant (pour la semaine prochaine)

Proposition. *Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

Démonstration. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\delta = ad - bc$ son déterminant. Soit $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. La démonstration repose sur le fait que cette matrice vérifie $AB = \delta I_2$ (calcul à détailler au tableau). On démontre maintenant l'équivalence par double implicitation :

($\Leftarrow$) Supposons $\delta \neq 0$ et montrons que A est inversible. Puisque $\delta \neq 0$, la matrice $\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}B$ est bien définie, et d'après les règles de calcul du produit matriciel : $A\widetilde{B} = \frac{1}{\delta}AB = \frac{1}{\delta}\delta I_2 = I_2$. D'après un théorème (admis) du cours, ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1} = \widetilde{B}$.

($\Rightarrow$) Supposons que A est inversible et montrons que $\delta \neq 0$. Procédons par l'absude en supposant que $\delta = 0$. Alors $AB = 0I_2$ est la matrice nulle. Or $B = A^{-1}AB$, donc $B = 0$. Ainsi $a = b = c = d = 0$, donc on a aussi $A = 0$. Ceci est absurde car $A^{-1}A = I_2$, ce qui prouve que $\delta \neq 0$. □