Colles de mathématiques en E1A

Étude globale des fonctions, systèmes linéaires

Semaine 17 : du 30 janvier au 4 février

Il est essentiel cette semaine que chaque élève résolve au moins un système linéaire.

1 Connaissances exigibles

1.1 Limites de fonctions

Ce chapitre n'est plus au cœur des colles cette semaine, mais l'étude globale des fonctions pourra encore amener des calculs de limites en exercice.

1.2 Étude globale des fonctions

Cours :

— Fonction paire, fonction impaire. Fonction majorée, minorée, bornée. Notion de maximum, minimum. Cas des fonctions monotones sur un segment. Monotonie des fonctions composées. Théorème de la limite monotone pour les fonctions.

— Continuité globale. Opérations algébriques et compositions de fonctions continues. Théorème des bornes. Continuité par morceaux.

— Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue. Théorème de la bijection, dans sa version équation et dans sa version complète (avec les propriétés de l'application réciproque). Étude de suites définies implicitement.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Étudier la parité éventuelle d'une fonction.

— Déterminer la monotonie d'une composée de fonctions monotones.

— Justifier précisément la continuité d'une fonction définie par opérations algébriques ou par composition.

— Établir l'existence d'un x tel que $f(x) = y$ en utilisant judicieusement le théorème des valeurs intermédiaires.

— Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone.

— Établir l'existence et l'unicité d'un x tel que $f(x) = y$ en utilisant le théorème de la bijection.

— Donner un encadrement de x tel $f(x) = y$ en utilisant le théorème de la bijection (version complète).

— Prouver qu'une fonction est bijective de réciproque continue et monotone (théorème de la bijection).

1.3 Systèmes linéaires

Cours :

— Coefficients, inconnues, second membre. Solution. Système homogène. Système de Cramer. Équivalence.

— Inversibilité des opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ et $L_i \leftrightarrow L_j$ lorsque $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$. Algorithme du pivot de Gauss pour réduire un système quelconque à une forme échelonnée (en « trapèze »).

— Conditions de compatibilité. Notion de rang d'un système et caractérisation des systèmes de Cramer. Paramétrisation de l'ensemble des solutions dans le cas où le rang est plus petit que le nombre d'inconnues.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

— Résoudre un système linéaire quelconque avec l'algorithme du pivot de Gauss.

— Paramétrer l'ensemble des solutions lorsque cet ensemble est infini.

— Résoudre un système à paramètres en faisant des disjonctions de cas.

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Monotonie d'une composée

Proposition. *Soient A, B des parties de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f(A) \subset B$. Si f et g sont monotones, alors la fonction $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est monotone et son sens de variation est donné par la « règle des signes » :* $\begin{array}{c||c|c} & \nearrow & \searrow \\ \hline \nearrow & \nearrow & \searrow \\ \searrow & \searrow & \nearrow \end{array}$*. De plus, si la monotonie de f et g est stricte, alors celle de $g \circ f$ aussi.*

Démonstration. Notons déjà que $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est bien définie d'après la condition $f(A) \subset B$.

— Supposons f et g décroissantes et montrons que $g \circ f$ est croissante. Soient $(x, y) \in A^2$ tels que $x \leq y$. Alors $f(x) \geq f(y)$ par décroissance de f, puis $g(f(x)) \leq g(f(y))$ par décroissance de g. Ainsi $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)(y)$.

— Supposons cette fois que f est croissante et g décroissante. Soient $(x, y) \in A^2$ tels que $x \leq y$. Alors $f(x) \leq f(y)$ par croissance de f, puis $g(f(x)) \geq g(f(y))$ par décroissance de g. Ainsi $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$.

— Les deux autres cas sont similaires.

— Lorsque la monotone de f et de g est stricte, on peut prendre toutes les inégalités strictes ci-dessus. $\square$

2.2 Image d'un segment par une fonction continue

Proposition. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f admet un minimum $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, un maximum $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ et de plus $f([a, b]) = [m, M]$.*

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des bornes, elle est donc bornée et elle admet un maximum et un minimum, ce qui justifie l'existence de m et M. On va maintenant établir l'égalité des ensembles $f([a, b])$ et $[m, M]$ par double inclusion :

— *Montrons que $f([a, b]) \subset [m, M]$.* Soit $y \in f([a, b])$. Par définition de l'ensemble-image, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est minorée par m et majorée par M, donc $m \leq f(x) \leq M$. Autrement dit $m \leq y \leq M$, d'où $y \in [m, M]$.

— *Montrons que $[m, M] \subset f([a, b])$.* Soit $y \in [m, M]$. Puisque m est un minimum, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$. De même, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = M$. Ainsi, $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$ car $m \leq y \leq M$.
Supposons que $\alpha \leq \beta$, le cas $\beta \leq \alpha$ étant similaire. Alors la fonction f est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$ (par restriction). De plus, $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x) = y$. Puisque $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, il existe donc $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$, d'où $y \in f([a, b])$.

$\square$

2.3 Théorème de la bijection

Proposition. *Soit f une fonction définie sur un* intervalle *I,* continue *sur I,* strictement monotone *sur I.*

(i) L'ensemble-image $J = f(I)$ est un intervalle.

(ii) L'application $\phi : I \to J$ définie par $x \mapsto f(x)$ est une bijection.

(iii) La bijection réciproque $\phi^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même sens que f.

Démonstration. (i) La fonction f étant continue sur I, qui est un intervalle, on sait que l'ensemble-image $f(I)$ est un intervalle d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

(ii) *Montrons que ϕ est une surjection.* Soit $y \in J$. Par définition de l'ensemble-image $J = f(I)$, il exise $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit, $\phi(x) = f(x) = y$.
Montrons que ϕ est une injection. L'application ϕ est strictement monotone car elle coïncide sur I avec la fonction f, qui elle-même est strictement monotone. On a donc ϕ injective.
Conclusion : l'application ϕ est surjective et injective, donc elle est bijective.

(iii) La continuité est admise.
Pour la monotonie, on va supposer que f (et ϕ a foriori) est strictement croissante. Soient alors $(y_1, y_2) \in J^2$ tels que $y_1 < y_2$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\phi^{-1}(y_1) \geq \phi^{-1}(y_2)$. Alors $\phi(\phi^{-1}(y_1)) \geq \phi(\phi^{-1}(y_2))$ par croissance de ϕ. Mais alors $y_1 \geq y_2$ car $\phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_J$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $\phi^{-1}(y_1) < \phi^{-1}(y_2)$. Le cas strictement décroissant est similaire. $\square$

3 Conseils

- Attention aux erreurs sur le type des objets manipulés : ensembles, nombres, fonctions. Méfiez-vous particulièrement des abus de langage fautifs comme « la fonction $f(x)$ » ou « $(x^2)' = 2x$ » !
- Veillez toujours à citer précisément les résultats du cours et à vérifier explicitement leurs hypothèses.