Colles de mathématiques en E1A

Limites, étude globale des fonctions

Semaine 16 : du 23 au 27 janvier

1 Connaissances exigibles

1.1 Limites de fonctions

Cours :

- Limite ponctuelle d'une fonction. Limite à gauche, limite à droite. Opérations algébriques sur les limites. Composition des limites avec une fonction ou une suite. Passage à la limite dans les inégalités. Théorème d'encadrement. Théorème de la limite monotone. Limites infinies.
- Croissances comparées en $+\infty$ des fonctions logarithmes, puissances, exponentielles. Croissances comparées en 0^+ des fonctions logarithmes et puissances. Limite de $\ln(1+x)/x$ pour $x \to 0$.
- Continuité ponctuelle. Prolongement par continuité en un point. Les fonctions usuelles, sauf la partie entière, sont continues en tout point de leur domaine de définition.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Calculer des limites à partir des fonctions usuelles et des opérations algébriques.
- Composer des limites, en utilisant éventuellement un changement de variable et la continuité.
- Démontrer une limite à l'aide un encadrement, éventuellement avec des valeurs absolues.
- Identifier le terme dominant dans une somme à l'aide des croissances comparées.
- Lever une indétermination avec des racines carrées en utilisant par la quantité conjuguée.
- Étudier la continuité, ou l'existence d'un prolongement continu, en un point, d'une fonction.

1.2 Étude globale des fonctions

Cours :

- Fonction paire, fonction impaire. Fonction majorée, minorée, bornée. Notion de maximum, minimum. Cas des fonctions monotones sur un segment. Monotonie des fonctions composées. Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
- Continuité globale. Opérations algébriques et compositions de fonctions continues. Théorème des bornes. Continuité par morceaux.
- Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue. Théorème de la bijection, dans sa version équation et dans sa version complète (avec les propriétés de l'application réciproque). Étude de suites définies implicitement.

Méthodes essentielles à savoir appliquer :

- Étudier la parité éventuelle d'une fonction.
- Déterminer la monotonie d'une composée de fonctions monotones.
- Justifier précisément la continuité d'une fonction définie par opérations algébriques ou par composition.
- Établir l'existence d'un x tel que $f(x) = y$ en utilisant judicieusement le théorème des valeurs intermédiaires.
- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone.
- Établir l'existence et l'unicité d'un x tel que $f(x) = y$ en utilisant le théorème de la bijection.
- Donner un encadrement de x tel $f(x) = y$ en utilisant le théorème de la bijection (version complète).

2 Questions de cours suggérées

Les énoncés font partie de la question. Chacune des notions évoquées dans l'énoncé ou sa preuve doit pouvoir être définie précisément sur demande du colleur. Il ne s'agit par de réciter par cœur les démonstrations, mais de les comprendre et savoir les refaire, en détaillant éventuellement les arguments.

2.1 Croissances comparées

Proposition. *Pour tous α, β, γ strictement positifs,*

En $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\gamma x}} = 0$. *(de manière informelle, $\ln(x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x}$)*

En 0^+ : $\lim_{x \to 0^+} |\ln(x)|^\alpha \, x^\beta = 0$. *(de manière informelle, $|\ln(x)|^\alpha \ll 1/x^\beta$)*

La preuve des croissances comparées en $+\infty$ n'a pas été détaillée en cours. Elle est admise.

Démonstration des croissances comparées en 0^+. Notre stratégie consiste à nous ramener aux croissances comparées en $+\infty$ à l'aide d'un changement de variable. Soit $x > 0$. Posons $y = 1/x$. Alors $x = 1/y$, donc

$$|\ln(x)|^\alpha \, x^\beta = \left|\ln\left(\tfrac{1}{y}\right)\right|^\alpha \left(\frac{1}{y}\right)^\beta = |-\ln(y)|^\alpha \frac{1}{y^\beta} = \frac{|\ln(y)|^\alpha}{y^\beta} = \frac{|\ln(1/x)|^\alpha}{(1/x)^\beta}.$$

On sait que $\lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$. De plus, $\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)^\alpha}{y^\beta} = 0$ d'après les croissances comparées en $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1/x)^\alpha}{(1/x)^\beta} = 0$ par application du théorème de composition des limites.
Ceci conclut la démonstration car $|\ln(y)| = \ln(y)$ dès que $y \geq 1$, en particulier lorsque $y \to +\infty$. □

2.2 Limite du taux d'accroissement du logarithme

Proposition. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Une démonstration utilisant les notions de limite à gauche et à droite a été vue en cours. En voici une autre, reposant sur le même encadrement, mais qui utilise la valeur absolue. Les élèves sont libres de choisir celle qu'ils préfèrent.

Démonstration. En vue d'appliquer le théorème d'encadrement, notre stratégie consiste à chercher une fonction auxiliaire g telle que

$$\forall x > -1, \qquad \left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| \leq g(x), \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

Soit $x > -1$. D'après l'inégalité de concavité du logarithme, on sait que $\ln(1+x) \leq x$, d'où $\ln(1+x) - x \leq 0$, de sorte que

$$|\ln(1+x) - x| = x - \ln(1+x) = x + \ln\left(\frac{1}{1+x}\right) \leq x + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x^2}{1+x}.$$

Puisque $x^2 = |x|^2$, on en déduit que pour tout x réel tel que $x > -1$ et $x \neq 0$:

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| = \left|\frac{\ln(1+x) - x}{x}\right| = \frac{|\ln(1+x) - x|}{|x|} \leq \frac{|x|}{1+x}.$$

Or $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{1+x} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0$. □

2.3 Image d'un segment par une fonction continue

Proposition. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors f admet un minimum $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$, un maximum $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ et de plus $f([a, b]) = [m, M]$.*

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des bornes, elle est donc bornée et elle admet un maximum et un minimum, ce qui justifie l'existence de m et M. On va maintenant établir l'égalité des ensembles $f([a, b])$ et $[m, M]$ par double inclusion :

— *Montrons que* $f([a, b]) \subset [m, M]$. Soit $y \in f([a, b])$. Par définition de l'ensemble image, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. La fonction f est minorée par m et majorée par M, donc $m \leq f(x) \leq M$. Autrement dit $m \leq y \leq M$, d'où $y \in [m, M]$.

— *Montrons que* $[m, M] \subset f([a, b])$. Soit $y \in [m, M]$. Puisque m est un minimum, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = m$. De même, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = M$. Ainsi, $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$.
Supposons que $\alpha \leq \beta$, le cas $\beta \leq \alpha$ étant similaire. Alors la fonction f est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$ (par restriction). De plus, $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $f(x) = y$. Puisque $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, il existe donc $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$, d'où $y \in f([a, b])$.

□

3 Conseils

— Attention aux erreurs sur le type des objets manipulés : ensembles, nombres, fonctions. Méfiez-vous particulièrement des abus de langage fautifs comme « la fonction $f(x)$ » ou « $(x^2)' = 2x$ » !

— Veillez toujours à citer précisément les résultats du cours et à vérifier explicitement leurs hypothèses.