Colles de mathématiques en E1A

Dénombrement, coefficients binomiaux, probabilités

Semaine 12 : du 12 au 16 décembre

1 Recommandations particulières

— On testera la compréhension de la formule du binôme sur des exemples simples.

— Les situations d'équiprobabilité pourront amener des questions de dénombrement.

— Les horreurs du type « somme d'évènements » ou « union de nombres » seront dument châtiées.

2 Connaissances exigibles

— Coefficients binomiaux. Valeurs particulières. Formule avec les factorielles. Formule de symétrie. Formule de Pascal. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.

— Vocabulaire probabiliste : univers, issue, évènement. Probabilité sur un univers fini. Principe d'inclusion-exclusion de Poincaré. Système complet d'évènements. Une probabilité sur un univers fini est déterminée par les images des évènements élémentaires.

— Indépendance. Indépendance mutuelle. Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

3 Questions de cours

- *Une probabilité conditionnelle est une probabilité.* Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. La fonction

$$E \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)}$$

définit une application $\mathbb{P}_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ qui est une probabilité.

Démonstration.

— Vérifions que l'application est bien définie. Soit $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. Le quotient $\mathbb{P}(A \cap E)/\mathbb{P}(A)$ est bien défini car $\mathbb{P}(A) \neq 0$, et il est positif. De plus $A \cap E \subset A$, donc $\mathbb{P}(A \cap E) \leq \mathbb{P}(A)$ par « croissance ». En divisant par $\mathbb{P}(A)$ qui est strictement positif, on obtient $\mathbb{P}_A(E) \leq 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_A(E) \in [0; 1]$.

— Vérifions que $\mathbb{P}_A(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}_A(\emptyset) = 0$. On sait que $A \cap \Omega = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$, donc

$$\mathbb{P}_A(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_A(\emptyset) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \emptyset)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0}{\mathbb{P}(A)} = 0.$$

— Vérifions la propriété d'additivité. Soit $(E, F) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ un couple d'évènements incompatibles. Alors $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup (A \cap F)$ par distributivité et $(A \cap E) \cap (A \cap F) = A \cap E \cap F = A \cap \emptyset = \emptyset$ par incompatibilité. Ainsi $\mathbb{P}(A \cap (E \cup F)) = \mathbb{P}(A \cap E) + \mathbb{P}(A \cap F)$ par additivité de $\mathbb{P}$, d'où

$$\mathbb{P}_A(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (E \cup F))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(E) + \mathbb{P}_A(F).$$

- *Système complet d'évènement et formule des probabilités totales.*
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ des évènements. On dit que $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements si :
— les (A_i) recouvrent Ω : $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$,
— les (A_i) sont deux à deux incompatibles : pour tous i et j distincts, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
On suppose que $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements. Alors pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap A_i).$$

Si $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, …, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$, on a de plus : $\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(E)$.

Démonstration. Puisque les (A_i) recouvrent Ω, on a par distributivité :

$$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i), \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i) \right).$$

Par ailleurs, les (A_i) sont deux à deux incompatibles donc pour tous i et j distincts,

$$(E \cap A_i) \cap (E \cap A_j) = E \cap A_i \cap A_j = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

La propriété d'additivité de $\mathbb{P}$ entraîne alors $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap A_i)$.
Lorsque $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, …, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ on peut écrire $\mathbb{P}(E \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(E)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ d'après la formule des probabilités composées, d'où la formule des probabilités totales.

- *Formule du binôme de Newton.* Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Démonstration. On procède par récurrence :
Initialisation. On a $(x+y)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$ d'où la formule pour $n = 0$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. En notant $u_i = x^i y^{n+1-i}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$, nous pouvons écrire $(x+y)^{n+1}$ comme

$$\begin{aligned}
(x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k && \text{(distributivité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k && \text{(changement d'indice)} \\
&= u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] u_k + u_0 && \text{(linéarité)} \\
&= u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u_k + u_0 && \text{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_k.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$. Ceci prouve l'hérédité.