Colles de mathématiques en E1A

Dénombrement, coefficients binomiaux, probabilités (cours)

Semaine 11 : du 5 au 9 décembre

1 Connaissances exigibles

— Ensemble fini. Cardinal.

— Principe de bijection. Principe de partition. Lemme des bergers. Dénombrement des tirages dans une urne : avec ou sans remise, en tenant compte de l'ordre ou non.

— Coefficients binomiaux. Valeurs particulières. Formule avec les factorielles. Formule de symétrie. Formule de Pascal. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.

— Vocabulaire probabiliste. Probabilité sur un univers fini. Système complet d'évènements. Une probabilité sur un univers fini est déterminée par les images des évènements élémentaires.

2 Questions de cours

- *Formule du binôme de Newton.* Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

  Démonstration. On procède par récurrence :

  Initialisation. On a $(x+y)^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$ d'où la formule pour $n = 0$.

  Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. En notant $u_i = x^i y^{n+1-i}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$, nous pouvons écrire $(x+y)^{n+1}$ comme

$$
\begin{aligned}
(x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k && \text{(distributivité)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k && \text{(changement d'indice)} \\
&= u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] u_k + u_0 && \text{(linéarité)} \\
&= u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u_k + u_0 && \text{(formule de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_k.
\end{aligned}
$$

  On en déduit que $(x+y)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$. Ceci prouve l'hérédité.

  Conclusion. D'après le principe de récurrence, la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Formule de Pascal.* Pour tous n et k entiers naturels, $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

  Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$, et soit x un élément de E. on pose

  $$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}_{k+1}(E) \mid x \in A\}, \qquad \mathcal{C}' = \{A \in \mathcal{P}_{k+1}(E) \mid x \notin A\}, \qquad E' = E \setminus \{x\}.$$

  Alors $\mathcal{P}_{k+1}(E) = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{P}_{k+1}(E)) = \mathrm{card}(\mathcal{C}) + \mathrm{card}(\mathcal{C}')$ d'après le principe de partition. De plus, E' est un sous-ensemble de E de cardinal n.

  — Les applications $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \mathcal{P}_k(E') \\ A & \mapsto & A \setminus \{x\} \end{array}$ et $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_k(E') & \to & \mathcal{C} \\ B & \mapsto & B \cup \{x\} \end{array}$ sont réciproques.

  Elles sont donc bijectives et on en déduit que $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_k(E')) = \displaystyle\binom{n}{k}$.

  — De même, $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \to & \mathcal{P}_{k+1}(E') \\ A & \mapsto & A \end{array}$ est une bijection entre $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{P}_{k+1}(E')$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{C}') = \displaystyle\binom{n}{k+1}$.

  L'égalité $\mathrm{card}\left(\mathcal{P}_{k+1}(E)\right) = \mathrm{card}(\mathcal{C}) + \mathrm{card}(\mathcal{C}')$ se réécrit donc : $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

- *Définition et propriété fondamentale des systèmes complets d'évènements.* Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ des évènements. On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'évènements si :

  — les (A_i) recouvrent Ω : $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$,

  — les (A_i) sont deux à deux incompatibles : pour tous i et j distincts, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

  Dans ce cas, pour tout évènement $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}(E) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap A_i)$.

  Cas particulier important. Pour tout $E \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(E) = \displaystyle\sum_{\omega \in E} \mathbb{P}(\{\omega\})$.

  Démonstration. Soit $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. Puisque les (A_i) recouvrent Ω, on a par distributivité :

  $$E = E \cap \Omega = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i), \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i)\right).$$

  Par ailleurs, les (A_i) sont deux à deux incompatibles donc pour tous i et j distincts,

  $$(E \cap A_i) \cap (E \cap A_j) = E \cap A_i \cap A_j = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

  Le théorème d'additivité entraîne alors $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap A_i)$.