Colles de mathématiques en E1A

Ensembles et applications, dénombrement (cours)

Semaine 10 : du 28 novembre au 2 décembre

Avis aux colleurs : les exercices devront porter principalement sur les ensembles et les applications. Le cours sur le dénombrement et les coefficients binomiaux a été fait, mais pas les travaux dirigés. Vous pouvez cependant poser en fin de colle une question de dénombrement très proche du cours.

1 Connaissances exigibles

— Définition de l'inclusion. Prouver l'égalité de deux ensembles par double inclusion. Ensembles des parties. Produit cartésien. Opérations sur les ensembles. Règles de calcul. Ensemble fini. Cardinal.

— Composition de deux applications. Règles de calcul. Applications réciproques. Caractérisation. Unicité. Réciproque d'une composée.

— Injectivité. Une application strictement monotone est injective. Surjectivité. Image d'une partie par une application. Bijectivité. Une application est bijective si et seulement si elle admet une réciproque. Interprétation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité en termes d'antécédents.

— Principe de bijection. Principe de partition. Lemme des bergers. Dénombrement des tirages dans une urne : avec ou sans remise, en tenant compte de l'ordre ou non.

— Coefficients binomiaux. Valeurs particulières. Formule avec les factorielles. Formule de symétrie. Formule de Pascal. Triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.

2 Questions de cours

Tous les élèves commencent par écrire les définitions de *injective* et de *surjective* avec les quantificateurs. La moindre erreur entraîne une note < 10.

- *Règles de calcul avec les ensembles.* Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E.

Propriétés de la réunion.

— $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)

— $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)

— $A \cup \emptyset = A$ (élément neutre)

— $A \cup E = E$ (élément absorbant)

— $A \cup A = A$ (idempotence)

— $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (treillis)

— Si $A \subset B$, alors $A \cup C \subset B \cup C$ (croissance)

Distributivité.

— $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

— $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propriétés de l'intersection.

— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)

— $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)

— $A \cap E = A$ (élément neutre)

— $A \cap \emptyset = \emptyset$ (élément absorbant)

— $A \cap A = A$ (idempotence)

— $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ (treillis)

— Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$ (croissance)

Lois de De Morgan.

— $\overline{\overline{A}} = A$

— $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

— $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- *Caractérisation des bijections.* Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors f est bijective si et seulement si elle admet une réciproque.

  Démonstration.

  ($\Leftarrow$) On suppose que f admet une réciproque f^{-1}. Montrons que f est bijective.

  — Injectivité. Montrons que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$.
  Soient $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$. On en déduit que $x_1 = x_2$ car $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

  — Surjectivité. Montrons que $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
  Soit $y \in F$. Posons $x = f^{-1}(y)$. Alors $x \in E$ et $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ car $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

  ($\Rightarrow$) On suppose que f est bijective. Alors f est surjective, donc tout $y \in F$ admet au moins un antécédent dans E, que l'on note $g(y)$. Ceci définit une application $g : F \to E$. Montrons que f et g sont réciproques.

  — Montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Soit $y \in F$. Par définition de $g(y)$, on a $f(g(y)) = y$.

  — Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $x \in E$. On pose $y = f(x)$. Comme précédemment $f(g(y)) = y$, donc $f(g(y)) = f(x)$. Puisque f est injective, on en déduit que $g(y) = x$. Ainsi, $g(f(x)) = x$.

- *Formule de Pascal.* Pour tous n et k entiers naturels, $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

  Démonstration. Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$, et soit x un élément de E. on pose

  $$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}_{k+1}(E) \mid x \in A\}, \qquad \mathcal{C}' = \{A \in \mathcal{P}_{k+1}(E) \mid x \notin A\}, \qquad E' = E \setminus \{x\}.$$

  Alors $\mathcal{P}_{k+1}(E) = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$, donc $\binom{n+1}{k+1} = \mathrm{card}(\mathcal{P}_{k+1}(E)) = \mathrm{card}(\mathcal{C}) + \mathrm{card}(\mathcal{C}')$ d'après le principe de partition. De plus, E' est un sous-ensemble de E de cardinal n.

  — Les applications $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \to & \mathcal{P}_k(E') \\ A & \mapsto & A \setminus \{x\} \end{array}$ et $\Psi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_k(E') & \to & \mathcal{C} \\ B & \mapsto & B \cup \{x\} \end{array}$ sont réciproques. D'après le principe de bijection, on en déduit que $\mathrm{card}(\mathcal{C}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}_k(E')) = \binom{n}{k}$.

  — De même, $\begin{array}{rcl} \mathcal{C}' & \to & \mathcal{P}_{k+1}(E') \\ A & \mapsto & A \end{array}$ définit une bijection entre $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{P}_{k+1}(E')$, donc $\mathrm{card}(\mathcal{C}') = \binom{n}{k+1}$.

  Démonstration. Si $k > n$, la formule s'écrit $0 = 0 + 0$, ce qui est vrai. Supposons donc que $k \leq n$.

  $$\begin{aligned}
  \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
  &= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\
  &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right] \\
  &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \times \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} \\
  &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
  &= \binom{n+1}{k+1}
  \end{aligned}$$