

# Introduction à la modélisation :

Cours de L3 : Mathématiques I - ce qu'un biologiste ne peut ignorer

Benoît Perez-Lamarque & Pierre Vincens

ENS Paris - Département de Biologie

13 décembre 2019

# Qu'est-ce que la modélisation ?

**"Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel"**

(Alain Pavé, 1994, *Modélisation en Biologie et en Écologie*)

# Qu'est-ce que la modélisation ?

**"Un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel"**

(Alain Pavé, 1994, *Modélisation en Biologie et en Écologie*)

**Représentation symbolique** : verbe (langage), représentation géométrique et/ou langage mathématique ou informatique.

# Les outils de la modélisation :

	Déterministes (Systèmes dynamiques)	Stochastiques (Processus stochastiques)
Temps discret	<b>Équations récurrentes (suites)</b>  Modèle matriciel de population (Leslie)	<b>Chaînes de Markov</b>  Modèle de dynamique moléculaire  Modèle de marche aléatoire en génétique des populations
Temps continu	<b>Équations différentielles</b>  Modèle de Lotka-Volterra  Modèle de FitzHugh–Nagumo	<b>Processus de Markov</b>  Modèle d'évolution nucléotidique

Figure – Typologie des modèles vus en cours

# Les outils de la modélisation :

Caractériser un modèle en 6 étapes :

- Déterministe *versus* stochastique : entièrement déterminée par paramètres et conditions initiales *versus* composantes aléatoires ;
- Temps discret *versus* continu : e.g. espace du temps  $\in \mathbb{N}_+$  *versus*  $\mathbb{R}$  ;
- Autonome *versus* non-autonome : le temps n'apparaît pas comme variable dans l'équation de la dynamique *versus* apparaît.
- Nature de l'espace d'état : ensemble discret, espace vectoriel...
- Équation de la dynamique :  $u_t = f(u_{t-1})$ ,  $\dot{u} = f(u)$ ...
- Conditions initiales :  $u_0$

# Programme :

	Partie 1	Partie 2	Partie 3
Thème	<b>Équations récurrentes</b>	<b>Équations différentielles</b>	<b>Chaînes de Markov</b>
Problème biologique	Transport des protéines dans la cellule	Dynamiques de populations de proies et prédateurs	Ouverture des canaux calcique
Définitions	Matrice, Valeur/vecteur propre Déterminant	Trajectoire, Diagramme de phase Isocline, Flot Diagramme de bifurcation	Trajectoire, Distribution invariante État transient/récurrent
Savoir faire	Écrire un modèle linéaire de flux Définir une matrice Opération matricielle Trouver valeurs/vecteurs propres Simuler un modèle linéaire	Écrire un modèle d'équations différentielles Simuler une trajectoire Représenter l'espace des phases Comprendre l'intégration numérique Représenter un diagramme de bifurcation	Écrire un modèle de chaînes de Markov Échantillonner une distribution Comparer des nombres à virgule flottante Simuler une chaîne de Markov
Résultat du cours à illustrer	Théorème de Perron-Froebenius	Théorème de Cauchy-Lipschitz	Théorème ergodique

Figure – Typologie des modèles vus en cours

# Programme :

*[http://www.normalesup.org/~bperezlamarq/maths\\_L3.html](http://www.normalesup.org/~bperezlamarq/maths_L3.html)*