Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence de Physique , L2

Cours de Mathématiques-MP4
2010-2011, 2^{nd} semestre

Test 2, durée 30 min.

Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :
Énoncer le théorème de Fubini pour les intégrales multiples sur une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :
Donner la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}\,x.$$

Exercice 3 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0;\pi]$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}\,t \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}.$$
3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $]0;+\infty[$.
4. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}\,t$$
Montrer que u_n a le signe de $(-1)^n$ et que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
5. En déduire que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$
converge quand même.