

Correction partielle du Test 2 bis

Étudier selon le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature (intégrable ou non) de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

On note $f: t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* .

Au voisinage de 0 on a l'équivalence :

$$f(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

Donc f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ c'est-à-dire $\alpha < 2$.

De plus, comme f est positive au voisinage de 0,

$$\int_{\varepsilon}^1 f(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$$

dès que $\alpha \geq 2$.

Au voisinage de $+\infty$, on a la majoration :

$$|f(t)| \leq \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $\alpha > 1$.

Supposons maintenant $\alpha \leq 1$, et montrons qu'alors f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$:

Pour $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| dt &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \\ &\geq \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \\ &= \frac{2}{((k+1)\pi)^\alpha} = \frac{C}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Par critère de Riemann sur les séries, la suite $\left(\frac{C}{(k+1)^\alpha}\right)_{k \geq 1}$ n'est pas sommable car $\alpha \leq 1$.

Donc

$$\int_1^{N\pi} |f(t)| dt \geq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ pour $\alpha \leq 1$.

Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha \in]1, 2[$.

Note : par contre $\int_0^A f(t) dt$ converge quand même vers une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$ si $\alpha \in]0, 1]$, grâce critère de Leibniz sur les séries. (c'est-à-dire que l'intégrale impropre converge quand même bien que f ne soit pas intégrable).