

Instabilités en magnétohydrodynamique, théorèmes anti-dynamo

Ismaël Bouya, sous la direction de David Gérard-Varet

Table des matières

1	Introduction physique	2
1.1	Équation d'induction	2
1.1.1	Équations de Maxwell	2
1.1.2	Changement de référentiel	3
1.2	Réaction du champ magnétique sur le fluide	4
1.3	Fluide incompressible et adimensionnement	5
1.4	Conditions aux bords	5
2	Théorèmes anti-dynamo	5
2.1	Décomposition du champ magnétique	6
2.2	Amplification du champ magnétique dans un fluide	10
2.3	Champs de vitesse pouvant engendrer une amplification du champ magnétique	14
3	Étude de nombres de Reynolds magnétique grands	15
3.1	Équation	15
3.2	Formulation Lagrangienne	16
3.3	Cas d'un fluide conducteur idéal	16
3.4	Retour au cas d'un fluide non idéal	17
3.5	Étude du noyau de Green	20
3.6	Théorème anti-dynamo	24
4	Formulaire, appendice	26
4.1	Dérivées spatiales en coordonnées sphériques	26
4.2	Intégrales oscillantes	26

Depuis le début du XX^e siècle, on cherche à étudier comment un corps céleste tel que la Terre peut engendrer un champ magnétique “permanent”. L’hypothèse qui était admise alors, une aimantation permanente grâce aux éléments ferromagnétiques, s’est révélée impossible depuis qu’on connaît la composition interne et les conditions au centre de la Terre. En 1919, J.Larmor a envisagé une nouvelle hypothèse : ces champs magnétiques proviendraient d’un effet dynamo auto-entretenu.

On parle d’effet dynamo lorsqu’il y a une conversion d’énergie mécanique en énergie électromagnétique. Dans le cas de la Terre, l’écoulement du fer/nickel liquide dans le noyau (ou d’autres éléments selon l’astre) engendrerait un champ magnétique, qui maintiendrait à son tour le mouvement du fluide. C’est cet effet là que nous allons modéliser et étudier :

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux lois physiques qui gouvernent cet effet : les équations de Maxwell permettront modulo certaines approximations (justifiées par la suite) d’obtenir les équations qui gouvernent la création du champ magnétique à partir du mouvement du fluide, tandis que les équations de Navier-Stokes modéliseront la réaction du champ sur la vitesse du fluide.

Nous verrons ensuite quelques théorèmes anti-dynamo : ce sont des théorèmes qui restreignent les situations possibles pour entretenir un effet dynamo. Nous nous limiterons à des restrictions sur les symétries des champs (ce sont les premiers types de restrictions qui ont été trouvés).

Enfin, nous étudierons le cas où le fluide se rapproche d’un “conducteur parfait”, c’est-à-dire un nombre de Reynolds magnétique grand. Pour simplifier cette étude, on se limitera à des champs de vitesse stationnaires (c’est-à-dire qu’on n’étudiera que l’action du fluide sur le champ magnétique et non pas l’effet réciproque).

1 Introduction physique

Un mouvement de particules chargées (par exemple au sein d’un fluide conducteur) induit un champ électromagnétique, qui a lui-même un effet sur les particules. Ce sont ces deux types de forces que nous allons modéliser ici, dans le cas d’un fluide, afin d’obtenir un système d’équations.

1.1 Équation d’induction

1.1.1 Équations de Maxwell

On part du système d’équations de Maxwell :

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{1.2}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.4}$$

Dans ce système, le champ E désigne le champ électrique, B désigne le champ magnétique, ρ_e désigne la densité de charge électrique, et j le courant.

Ces quatre grandeurs dépendent de la position et du temps. Les quantités ε_0, μ_0, c sont des constantes universelles (permittivité électrique du vide, perméabilité du vide et vitesse de la lumière) qui vérifient la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

On utilise de plus la notation ∇ pour les dérivées spatiales : $\nabla \cdot E = \text{div } E$, $\nabla \times E = \text{rot}E$, $\nabla f = \text{grad}f$.

On fait l'hypothèse que les vitesses caractéristiques des champs électrique et magnétique sont du même ordre que celle du fluide, et bien inférieures à la vitesse de la lumière ; on note L la longueur caractéristique du système, T son temps caractéristique. On note aussi la vitesse caractéristique $V = L/T \ll c$. Cette hypothèse dit qu'une dérivée spatiale (resp. temporelle) du champ électrique sera de l'ordre de E/L (resp. E/T), et de même pour le champ magnétique.

En ordres de grandeurs, l'équation (1.3) se traduit ainsi par $E \sim VB$.

Dans l'équation (1.4), le dernier terme du membre de droite est le courant de déplacement (il permet de rendre compatible les équations de Maxwell avec la conservation de la charge dans le cas général). Comme ici les vitesses caractéristiques sont bien inférieures à la vitesse de la lumière, ce terme peut être négligé devant $\nabla \times B$ (cela revient à négliger les termes d'ordre $(V/c)^2 \ll 1$) ; ainsi, l'équation (1.4) devient :

$$\nabla \times B \approx \mu_0 j. \quad (1.5)$$

1.1.2 Changement de référentiel

Il manque une relation constitutive au système (on a plus d'inconnues que d'équations). On va introduire la loi d'Ohm, qui est une loi phénoménologique, valable dans le cas d'un fluide conducteur. Comme le fluide est en mouvement, on se place à un instant donné dans le référentiel galiléen qui suit le fluide au point considéré à cet instant, et on écrit la loi d'Ohm dans ce référentiel.

La transformation de Lorentz des champs électrique et magnétique s'écrit :

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad (1.6)$$

$$E'_{\perp} = \gamma(v)(E_{\perp} + v \times B), \quad (1.7)$$

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad (1.8)$$

$$B'_{\perp} = \gamma(v) \left(B_{\perp} - v \times \frac{E}{c^2} \right), \quad (1.9)$$

où \parallel désigne la composante du champ parallèle à v et \perp la composante transverse, et $\gamma(v) =$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La transformation de charge et courant s'écrit :

$$\rho'_e = \gamma(v)(\rho_e - j \cdot \frac{v}{c^2}), \quad (1.10)$$

$$j'_{\parallel} = \gamma(v)(j_{\parallel} - \rho_e v), \quad (1.11)$$

$$j'_{\perp} = j_{\perp}. \quad (1.12)$$

Avec les mêmes approximations que précédemment, le champ électromagnétique dans le référentiel d'un fluide se déplaçant à la vitesse v se réduit à :

$$E' \approx E + v \times B, \quad (1.13)$$

$$B' \approx B, \quad (1.14)$$

$$j' \approx j. \quad (1.15)$$

La dernière approximation vient de (1.1) et (1.4) qui donnent $\rho_e \sim \varepsilon_0 \frac{VB}{L}$, $j \sim \frac{B}{\mu_0 L}$ et donc $c\rho_e \sim \frac{V}{c}j$. On a ainsi la loi d'Ohm :

$$j \approx \sigma(E + v \times B), \quad (1.16)$$

où σ est la conductivité électrique du milieu.

On prend alors le rotationnel de cette équation (1.16), et on utilise (1.3),(1.2),(1.5), ce qui donne l'équation d'induction :

$$\boxed{\frac{\partial B}{\partial t} \approx \nabla \times (v \times B) + \nu_m \Delta B}, \quad (1.17)$$

où $\nu_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ est la diffusivité magnétique. Cette équation et (1.2) gouvernent le champ magnétique (sous les approximations précédentes). Les autres grandeurs peuvent être obtenues à partir de là grâce aux autres équations.

1.2 Réaction du champ magnétique sur le fluide

La force électromagnétique exercée sur le fluide par unité de volume s'écrit $\rho_e E + j \times B$. De plus, en utilisant (1.1) et (1.16) (et (1.5) qui donne $\nabla \cdot j = 0$), on a

$$\rho_e \approx -\varepsilon_0 \nabla \cdot (v \times B). \quad (1.18)$$

Comme $E \sim VB$, on a dans l'approximation précédente uniquement la partie magnétique de la force :

$$\rho_e E \approx -\varepsilon_0 \nabla \cdot (v \times B) E \sim \varepsilon_0 V^2 B^2 / L = \frac{1}{\mu_0 L} \left(\frac{V^2}{c^2} \right) B^2, \quad (1.19)$$

$$j \times B \approx \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times B) \times B \sim \frac{1}{\mu_0 L} B^2. \quad (1.20)$$

Donc la contribution électrique peut être négligée devant la contribution magnétique de la force.

Pour un fluide Newtonien soumis uniquement à cette force, on a alors les équations de Navier-Stokes :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0}, \quad (1.21)$$

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = -\nabla p + \eta \Delta v + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) + j \times B}, \quad (1.22)$$

(j peut être remplacé par $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B$ (par (1.5)) ce qui donne une équation uniquement en ρ , v et B) où le champ p est le champ de pression dans le fluide, ρ la densité de masse, $\eta = \nu \rho$ est la viscosité dynamique (ν est la viscosité cinématique), et ξ la viscosité de volume.

1.3 Fluide incompressible et adimensionnement

On introduit les nombres de Reynolds, $Re = \frac{VL}{\nu}$ et $R_m = \mu_0 \sigma VL = \frac{VL}{\nu_m}$, et on utilise L , L/V , V , ρV^2 , $\sqrt{\mu_0 \rho V^2}$ comme unités de mesure, temps, vitesse, pression et champ magnétique. Dans le cas d'un fluide incompressible, (1.21) devient alors $\nabla \cdot v = 0$, et la viscosité de volume n'intervient plus ; on peut donc écrire les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) sous la forme :

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) + \frac{1}{R_m} \Delta B, \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{Re} \Delta v + (B \cdot \nabla)B. \quad (1.26)$$

1.4 Conditions aux bords

On considèrera dans la suite des situations où le milieu n'est pas homogène. Pour simplifier, on n'envisagera que des cas où σ (ou R_m dans la version adimensionnée) est constant par morceaux dans deux régions de l'espace séparées par une surface S fermée (typiquement une boule conductrice dans un milieu isolant). On notera par un indice i les grandeurs "à l'intérieur" de la surface et par un indice e les grandeurs "à l'extérieur" (et $[\cdot]$ désigne un saut de la grandeur à travers S)

On considère de plus qu'il n'y a pas de flux de particules à travers cette surface, c'est-à-dire $n \cdot v = 0$ sur la surface, où n est un vecteur normal unitaire à S .

D'après les équations de Maxwell (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), intégrées sur un petit volume/une petite surface fermée qui coupe S , on a les conditions à la frontière :

$$[n \cdot E] = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}, \quad (1.27)$$

$$[n \cdot B] = 0, \quad (1.28)$$

$$[n \times B] = \mu_0 j_s, \quad (1.29)$$

$$[n \times E] = 0, \quad (1.30)$$

où ρ_s et j_s sont d'éventuelles charges et courants surfaciques sur S .

Dans le cas où la conductivité reste finie, il ne peut pas y avoir de courant surfacique le long de la surface. Ainsi, dans ce cas là, la condition aux limites pour B s'écrit $[B] = 0$.

2 Théorèmes anti-dynamo

Les premiers théorèmes relatifs à l'effet dynamo ont été des théorèmes anti-dynamo, c'est-à-dire des théorèmes donnant des cas où il y a trop de symétries pour qu'un effet dynamo puisse être entretenu.

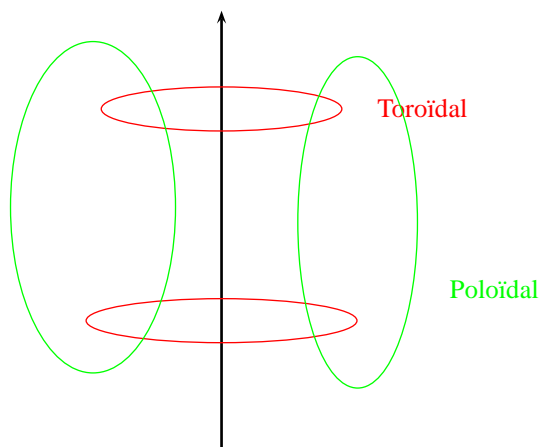
On va voir ici deux types de théorèmes anti-dynamo, en se limitant à deux types de géométrie : un espace cartésien périodique (avec uniquement un fluide conducteur, donc), ou un espace constitué d'une boule conductrice et d'un extérieur isolant (on utilisera dans ce cas les coordonnées sphériques,

et on introduira la décomposition toroïdale-poloïdale d'un champ de vecteur). Bien que les théorèmes soient différents, c'est le même type de restriction qui est appliqué dans les deux cas.

On regardera d'abord les restrictions portant sur le champ magnétique, grâce à deux théorèmes de Cowling : un champ magnétique à symétrie axiale ne peut pas être maintenu par un effet dynamo (géométrie sphérique), et un champ magnétique indépendant d'une des variables d'espace ne peut être maintenu par un effet dynamo (géométrie cartésienne périodique)

Ensuite, nous verrons les restrictions portant sur le champ des vitesses : en géométrie sphérique, un champ de vitesse purement toroïdal ne peut engendrer un effet dynamo, et un champ radial compressible de la forme $u = f(x)u_r$ ne peut pas engendrer d'effet dynamo. En géométrie cartésienne périodique, un flot plan ne peut pas produire d'effet dynamo.

2.1 Décomposition du champ magnétique



On introduit ici la décomposition toroïdale-poloïdale du champ magnétique : elle consiste à écrire le champ magnétique comme somme d'une composante qui "tourne" autour d'un axe (toroïdal) et d'une selon les pôles (poloïdal, à la manière des lignes de champ d'un solénoïde). On cherche à écrire le champ B en coordonnées sphériques sous la forme

$$B(r, \theta, \phi) = B_T + B_P, \quad (2.1)$$

$$B_T(r, \theta, \phi) = \nabla \times (rT), \quad (2.2)$$

$$B_P(r, \theta, \phi) = \nabla \times \nabla \times (rP). \quad (2.3)$$

(Le champ B étant à divergence nulle, il s'écrit comme un rotationnel)

Proposition 1

Pour tout champ B régulier de classe \mathcal{C}^∞ (de classe \mathcal{C}^2 suffit), il existe P et T champs scalaires \mathcal{C}^∞ tels que (2.1), (2.2) et (2.3) soient satisfaits. De plus, P et T sont uniques à l'ajout d'une fonction de r près.

Démonstration 1

Soit B un champ à divergence nulle. On note L^2 l'opérateur défini par :

$$L^2 f = (r \times \nabla)^2 f = r^2 \Delta f - r \cdot \nabla f - r \cdot \nabla (r \cdot \nabla f). \quad (2.4)$$

On a $L^2 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial \cdot}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2$, c'est la partie angulaire du laplacien en coordonnées sphériques, au facteur r^2 près.

Lemme 1

Cet opérateur défini sur les fonctions de la sphère unité est inversible des fonctions \mathcal{C}^∞ de moyenne nulle dans lui-même.

Démonstration 2

On note $H_0^1(S)$ le complété de l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ de moyenne nulle sur la sphère unité S , pour la norme issue du produit scalaire

$$(f, g)_{H_0^1(S)} = \iint fg \sin\theta \, d\theta \, d\phi + \iint \nabla_{\theta,\phi} f \cdot \nabla_{\theta,\phi} g \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \quad (2.5)$$

où

$$\nabla_{\theta,\phi} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial_\theta f}{\sin\theta} \\ \partial_\phi f \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Ainsi, $H_0^1(S)$ est un espace de Hilbert, dont on note H^{-1} l'espace dual. Alors L^2 s'étend en une application de $H_0^1(S)$ dans H^{-1} par l'application suivante :

$$\forall f \in H_0^1(S), \forall g \in H_0^1(S), L^2 f(g) = - \langle \nabla_{\theta,\phi} f, \nabla_{\theta,\phi} g \rangle_{L^2(S)}. \quad (2.7)$$

En effet, si f, g sont suffisamment réguliers, on a alors

$$- \langle \nabla_{\theta,\phi} f, \nabla_{\theta,\phi} g \rangle_{L^2(S)} = \iint \sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} \frac{\partial g}{\partial\theta} \, d\theta \, d\phi \quad (2.8)$$

$$+ \iint \sin\theta \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial f}{\partial\phi} \right) \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial g}{\partial\phi} \right) \, d\theta \, d\phi \quad (2.9)$$

$$= \iint \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) g \, d\theta \, d\phi + \iint \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} g \, d\theta \, d\phi \quad (2.10)$$

$$= \iint \sin\theta (L^2 f) g \, d\theta \, d\phi, \quad (2.11)$$

donc on a bien l'expression voulue, par densité.

De plus, pour $f \in H_0^1(S)$, on a :

$$\langle -L^2 f, f \rangle = \|\nabla_{\theta,\phi} f\|_{L^2(S)}^2. \quad (2.12)$$

Par inégalité de Poincaré (qui est valable ici car les fonctions sont de moyenne nulle), on obtient ainsi que :

$$\forall f \in H_0^1(S), \langle -L^2 f, f \rangle = \|\nabla_{\theta,\phi} f\|_{L^2(S)}^2 \geq C^2 \left(\|f\|_{L^2(S)}^2 + \|\nabla_{\theta,\phi} f\|_{L^2(S)}^2 \right), \quad (2.13)$$

c'est-à-dire que $a : (f, g) \mapsto \langle -L^2 f, g \rangle$ est coercive. Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, $-L^2$ est inversible de $H_0^1(S)$ dans son dual. Par des résultats classiques de régularité elliptique, $-L^2$ est donc inversible de l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ sur la sphère à moyenne nulle dans lui-même.

Montrons l'unicité :

Supposons qu'on ait une décomposition $B = B_T + B_P$.

Alors :

$$r \cdot B = -L^2 P, \quad (2.14)$$

$$r \cdot (\nabla \times B) = -L^2 T. \quad (2.15)$$

En effet,

$$r \cdot B = r \cdot (\nabla \times (rT)) + r \cdot (\nabla \times \nabla \times (rP)) \quad (2.16)$$

$$= 0 + r \cdot (-\Delta(rP) + \nabla(\nabla \cdot (rP))) \quad (2.17)$$

$$= -r^2 \Delta P + r \cdot \nabla P + r \cdot \nabla(r \cdot \nabla P) \quad (2.18)$$

$$= -L^2 P, \quad (2.19)$$

et, du fait que $\Delta(rP) = r\Delta P + \nabla P$:

$$r \cdot (\nabla \times B) = r \cdot (\nabla \times \nabla \times (rT)) - r \cdot (\nabla \times \Delta(rP)) \quad (2.20)$$

$$= -L^2 T - r \cdot (\nabla \times (r\Delta P)) \quad (2.21)$$

$$= -L^2 T. \quad (2.22)$$

Comme $r \cdot B$ et $r \cdot (\nabla \times B)$ sont de moyenne nulle sur la sphère (car B et $\nabla \times B$ sont à divergence nulle), on a donc nécessairement (à une fonction de r près, qu'on choisit de sorte que les champs soient de moyenne nulle sur la sphère) :

$$P = -L^{-2}(r \cdot B), \quad (2.23)$$

$$T = -L^{-2}(r \cdot \nabla \times B), \quad (2.24)$$

ce qui les définit de manière unique.

Montrons l'existence :

Soit B un champ régulier à divergence nulle. On pose

$$P = -L^{-2}(r \cdot B), \quad (2.25)$$

$$T = -L^{-2}(r \cdot \nabla \times B), \quad (2.26)$$

et on note $B' = B_P + B_T$. On va montrer que $B' = B$, ce qui donnera l'existence de la décomposition.

Or, d'après les calculs pour l'unicité, on a :

$$r \cdot B = -L^2 P = r \cdot B', \quad (2.27)$$

$$r \cdot (\nabla \times B) = -L^2 T = r \cdot \nabla \times B'. \quad (2.28)$$

Donc $A = B - B'$ vérifie :

$$\begin{cases} r \cdot A & = 0 \\ r \cdot (\nabla \times A) & = 0 \\ \nabla \cdot A & = 0 \end{cases} . \quad (2.29)$$

Montrons qu'alors $A = 0$:

Les deux premières équations nous donnent

$$\frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\phi A_\phi + \partial_\theta (\sin \theta A_\theta)) = 0, \quad (2.30)$$

donc pour tout r , $(\sin \theta A_\theta, A_\phi)$ est un champ bidimensionnel (en les variables (θ, ϕ) à divergence nulle. Il existe donc ψ_r fonction scalaire (qu'on peut choisir de moyenne nulle sur la sphère, quitte à retirer une constante) telle que :

$$\begin{cases} \sin \theta A_\theta = -\partial_\phi \psi_r \\ A_\phi = \partial_\theta \psi_r \end{cases} . \quad (2.31)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r \cdot (\nabla \times A) &= r * \frac{1}{r \sin \theta} \left(\partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \psi_r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi^2 \psi_r \right) \\ &= L^2 \psi_r \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Donc $\psi_r = 0$, et $A = 0$, ce qui montre le résultat voulu.

$B_T(r, \theta, \phi)$ est le champ toroïdal,

$$B_T = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} u_\theta - \frac{\partial T}{\partial \theta} u_\phi. \quad (2.33)$$

Et $B_P(r, \theta, \phi)$ le champ poloïdal,

$$r B_P = -L^2 P u_r + \frac{\partial^2 r P}{\partial \theta \partial r} u_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 r P}{\partial \phi \partial r} u_\phi, \quad (2.34)$$

où u_r, u_θ, u_ϕ sont des vecteurs unitaires dans les directions correspondantes. On peut aussi décomposer le courant en prenant le rotationnel (ce qui a pour effet d'échanger les champs toroïdal et poloïdal), grâce aux mêmes champs scalaires :

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = j = j_T + j_P. \quad (2.35)$$

Soit :

$$\mu_0 j_T = -\nabla \times (r \Delta P), \quad (2.36)$$

$$\mu_0 j_P = \nabla \times \nabla \times (r T). \quad (2.37)$$

Remarque : comme B est à divergence nulle, et du fait que

$$\nabla \times (\Delta(rT)) = \nabla \times (-\nabla \times \nabla \times (rT) + \nabla(\nabla \cdot rT)) = -\nabla \times \nabla \times \nabla \times (rT), \quad (2.38)$$

et

$$\Delta(rT) = r \Delta T + 2 \nabla T \cdot \nabla r = r \Delta T + 2 \nabla T, \quad (2.39)$$

on a :

$$\Delta B = -\nabla \times \nabla \times B = \nabla \times (r\Delta T) + \nabla \times \nabla \times (r\Delta P). \quad (2.40)$$

De plus, pour un champ indépendant de la variable ϕ , on a :

$$\begin{aligned} B_T &= -\frac{\partial T}{\partial \theta} u_\phi, \\ B_P &= -L^2 P u_r + \frac{\partial^2 r P}{\partial \theta \partial r} u_\theta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Donc la décomposition toroïdale-poloïdale consiste juste à séparer la composante en u_ϕ des deux autres.

2.2 Amplification du champ magnétique dans un fluide

Un premier théorème antidynamo concerne les champs invariants dans une direction.

On suppose ici le champ de vitesses indépendant du temps.

Théorème 1 (Cowling)

On se place dans le cas d'un fluide incompressible, et dans un espace cartésien périodique de période $2\pi L$. Alors un champ magnétique $B(x, y, t)$ indépendant de z ne peut être maintenu par un effet dynamo.

C'est-à-dire que pour toute solution (v, B) périodique de période $2\pi L$ et suffisamment régulière (disons \mathcal{C}^∞ pour simplifier) du système d'équations avec $\partial_z B = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que $\|B(t)\|_{L^2([0, 2\pi]^3)} \leq C e^{-\alpha t}$.

Démonstration 3

Dans le cas d'un tel champ, on peut supposer que le champ des vitesses ne dépend pas non plus de z , quitte à prendre la moyenne en z (En utilisant le fait que $\frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi L} \partial_z v(x, y, z, t) dz = 0 = \frac{1}{2\pi L} \partial_z \int_0^{2\pi L} v(x, y, z, t) dz$).

D'un point de vue physique : pour un tel mouvement, la composante B_z peut être engendrée grâce aux composantes B_x et B_y , par le mouvement vertical v_z . Par contre, il n'y a pas de source pour ces deux composantes, qui vont donc décroître.

Plus précisément :

Comme $\nabla \cdot B = \partial_x B_x + \partial_y B_y$, on peut écrire

$$B = \nabla \times (A u_z) + B_z u_z = (\partial_y A, -\partial_x A, B_z), \quad (2.42)$$

où A est périodique en x et y car il n'y a pas de champ moyen dans V .

Si A et B_z vérifient :

$$\partial_t A + v \cdot \nabla A = \varepsilon \Delta A, \quad (2.43)$$

$$\partial_t B_z + v \cdot \nabla B_z = \partial_y A \partial_x v_z - \partial_x A \partial_y v_z + \varepsilon \Delta B_z, \quad (2.44)$$

alors B satisfait l'équation d'induction.

Donc A vérifie une équation de diffusion sans source. Montrons qu'alors A est décroissante : en multipliant (2.43) par $2A$, on peut réécrire l'équation sous la forme :

$$\partial_t A^2 + \nabla \cdot (A^2 v) = 2\varepsilon \nabla \cdot (A \nabla A) - 2\varepsilon |\nabla A|^2. \quad (2.45)$$

En intégrant cette équation sur un volume élémentaire, on a :

$$\partial_t \int_V A^2 dV + \int_V \nabla \cdot (A^2 v) dV = 2\varepsilon \int_V \nabla \cdot (A \nabla A) dV - 2\varepsilon \int_V |\nabla A|^2 dV. \quad (2.46)$$

Mais pour un champ de vecteur E périodique, on a par la formule de Green-Ostrogradski :

$$\int_V \nabla \cdot E dV = \int_{\partial V} E \cdot dS = 0. \quad (2.47)$$

Il reste donc uniquement

$$\partial_t \int_V A^2 dV = -2\varepsilon \int_V |\nabla A|^2 dV. \quad (2.48)$$

Et comme A est de moyenne nulle, on a par inégalité de Poincaré :

$$\partial_t \int_V A^2 dV = -2\varepsilon \int_V |\nabla A|^2 dV \leq -2\varepsilon/L^2 \int_V A^2 dV. \quad (2.49)$$

Donc $\int_V A^2 dV$ décroît exponentiellement, au moins en $e^{-2\varepsilon t/L^2}$. On prend maintenant le gradient de (2.43) et on multiplie par ∇A :

$$\frac{1}{2} \partial_t |\nabla A|^2 + \nabla(v \cdot \nabla A) \cdot \nabla A = \varepsilon \nabla(\Delta A) \cdot \nabla A. \quad (2.50)$$

Puis on intègre :

$$\frac{1}{2} \partial_t \int |\nabla A|^2 + \int \nabla(v \cdot \nabla A) \cdot \nabla A = \varepsilon \int \nabla(\Delta A) \cdot \nabla A, \quad (2.51)$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \int |\nabla A|^2 + \varepsilon \int (\Delta A)^2 = \int (v \cdot \nabla A) \Delta A \quad (2.52)$$

$$\leq \underbrace{\|v\|_{L^\infty}}_{\leq c} \|\nabla A\|_{L^2} \|\Delta A\|_{L^2} \quad (2.53)$$

$$\leq \frac{c^2}{2\varepsilon} \|\nabla A\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta A\|_{L^2}^2. \quad (2.54)$$

Donc

$$\partial_t \|\nabla A\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\Delta A\|_{L^2}^2 \leq \frac{c^2}{\varepsilon} \|\nabla A\|_{L^2}^2. \quad (2.55)$$

$$\partial_t \|\nabla A\|_{L^2}^2 + \frac{2\varepsilon}{L^2} \|\nabla A\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon^2} \partial_t \|A\|_{L^2}^2 \leq 0. \quad (2.56)$$

D'où la décroissance exponentielle pour ∇A (et donc pour les deux premières composantes de B).

Pour B_z : En procédant comme avec A (on multiplie l'équation par $2B_z$), on arrive à :

$$\partial_t B_z^2 + \nabla \cdot (B_z^2 v) = 2(\nabla A \times \nabla v_z) \cdot u_z B_z + 2\varepsilon \nabla \cdot (B_z \nabla B_z) - 2\varepsilon |\nabla B_z|^2. \quad (2.57)$$

En intégrant, les termes en divergence disparaissent et il reste :

$$\partial_t \int_V |B_z|^2 = 2 \int_V (\nabla A \times \nabla v_z) \cdot u_z B_z - 2\varepsilon \int_V |\nabla B_z|^2 dV. \quad (2.58)$$

Et donc comme précédemment, par inégalité de Poincaré :

$$\partial_t \int_V |B_z|^2 + 2\varepsilon/L^2 \int_V |B_z|^2 dV \leq 2 \int_V (\nabla A \times \nabla v_z) \cdot u_z B_z. \quad (2.59)$$

On utilise alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on simplifie par $\|B_z\|_{L^2(V)}$:

$$\partial_t \|B_z\|_{L^2(V)} + \varepsilon/L^2 \|B_z\|_{L^2(V)} \leq \|\nabla A \times \nabla v_z\|_{L^2(V)}. \quad (2.60)$$

La fonction $f : t \mapsto \|B_z(t)\|_{L^2(V)}$, positive, dérivable (on suppose $\|B_z(t)\|_{L^2(V)} > 0$, sinon le résultat voulu est démontré dès que la quantité s'annule), vérifie donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) + \varepsilon/L^2 f \leq K e^{-2\varepsilon t/L^2}. \quad (2.61)$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d(f e^{\varepsilon t/L^2})}{dt} + \varepsilon/L^2 f e^{\varepsilon t/L^2} &= (f' + \varepsilon/L^2 f) e^{\varepsilon t/L^2} + \varepsilon/L^2 f e^{\varepsilon t/L^2} \\ &\leq K e^{-\varepsilon t/L^2} + \varepsilon/L^2 f e^{\varepsilon t/L^2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Et donc :

$$\frac{d(f e^{\varepsilon t/L^2})}{dt} \leq K e^{-\varepsilon t/L^2}. \quad (2.63)$$

En intégrant,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t) e^{\varepsilon t/L^2} - f(0) \leq K L^2/\varepsilon - K L^2/\varepsilon e^{-\varepsilon t/L^2}. \quad (2.64)$$

Donc f décroît exponentiellement (mais "moins vite" que A), et donc B aussi, d'où le résultat.

Remarque : On n'a pas vraiment utilisé le fait que le champ de vitesses est indépendant du temps. Il suffit que son gradient reste borné (c'est pareil pour le théorème suivant).

Théorème 2 (Cowling)

On considère ici une situation où on a une sphère de rayon a contenant du fluide conducteur à l'intérieur et un isolant à l'extérieur. Un champ magnétique à symétrie axiale $B(r, \theta, t)$ ne peut être maintenu par un fluide.

C'est-à-dire que pour toute solution (v, B) suffisamment régulière (disons \mathcal{C}^∞ pour simplifier) du système d'équations avec $\partial_\phi B = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que $\|B(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq C e^{-\alpha t}$

Démonstration 4

Pour un tel champ, on peut comme précédemment supposer que le champ de vitesses vérifie lui aussi la même condition (on n'utilisait que la périodicité, qui est encore valable ici). On utilise la décomposition toroïdale-poloïdale pour B et v : comme les champs sont indépendants de ϕ , on a,

d'après (2.33), $v_T \times B_T = 0$, donc la composante toroïdale de $v \times B$ est réduite à $v_P \times B_P$. La partie poloïdale de l'équation d'induction dans la partie conductrice s'écrit alors :

$$\partial_t B_P = \nabla \times (v_P \times B_P) + \varepsilon \Delta B_P. \quad (2.65)$$

Dans la partie isolante, l'équation d'induction se réduit à :

$$\Delta B = 0, \quad (2.66)$$

dont la partie poloïdale s'écrit simplement $\Delta B_P = 0$.

On écrit alors $B_P = \nabla \times A_T$ où $A_T = Au_\phi$ est un champ toroïdal, et on obtient dans la boule, en prenant le rotationnel inverse (à un gradient près, qui a une contribution nulle car le problème est indépendant de ϕ) :

$$\partial_t A_T = v_P \times (\nabla \times A_T) + \varepsilon \Delta A_T. \quad (2.67)$$

On a alors les équations pour A et B_ϕ , dans la boule :

$$\partial_t A + \frac{1}{r \sin \theta} v_P \cdot \nabla (r \sin \theta A) = \varepsilon \left(\Delta - \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \right) A, \quad (2.68)$$

$$\partial_t B_\phi + (r \sin \theta) v_P \cdot \nabla \left(\frac{1}{r \sin \theta} B_\phi \right) = \varepsilon \left(\Delta - \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \right) B_\phi + (r \sin \theta) B_P \cdot \nabla \Omega, \quad (2.69)$$

où $v_T = r\Omega \sin \theta u_\phi$ (avec cette définition, Ω est donc la vitesse angulaire du fluide au point considéré, par rapport à l'axe vertical). On se retrouve avec des équations similaires au cas précédent : A vérifie une équation de transport sans source et B_ϕ est généré par A (via les variations de la vitesse angulaire Ω).

On pose $\chi = r \sin \theta A$, $D^2 \chi = r \sin \theta \left(\Delta - \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \right) \left(\frac{1}{r \sin \theta} \chi \right)$. Alors χ vérifie l'équation (dans la sphère) :

$$\partial_t \chi + v_P \cdot \nabla \chi = \varepsilon D^2 \chi. \quad (2.70)$$

On multiplie cette équation par 2χ , et on intègre :

$$\partial_t \chi^2 + \nabla \cdot (\chi^2 v_P) = 2\varepsilon \nabla \cdot \left(\chi \nabla \chi - \frac{\chi^2}{r \sin \theta} \nabla (r \sin \theta) \right) - 2\varepsilon |\nabla \chi|^2. \quad (2.71)$$

En dehors de la sphère (" $\varepsilon = +\infty$ "),

$$0 = 2\nabla \cdot \left(\chi \nabla \chi - \frac{\chi^2}{r \sin \theta} \nabla (r \sin \theta) \right) - 2|\nabla \chi|^2. \quad (2.72)$$

À travers la surface, χ et $\partial_r \chi$ sont continus (car B l'est). En intégrant sur V_i la première équation et V_e la deuxième (avec les notations introduites précédemment), les termes en divergence donnent une intégrale sur la sphère donc s'annulent, et il reste :

$$\partial_t \int_{V_i} \chi^2 dV = -2\varepsilon \int_V |\nabla \chi|^2 dV. \quad (2.73)$$

On se retrouve ainsi avec la même estimation d'énergie que dans le cas planaire, qui donne ici aussi une décroissance exponentielle de χ .

Le cas de B_ϕ se traite comme le cas planaire, en posant ici $\omega = \frac{1}{r \sin \theta} B_\phi$.

2.3 Champs de vitesse pouvant engendrer une amplification du champ magnétique

Cette fois, on cherche des conditions sur le champ des vitesses pour obtenir un effet dynamo (plus de restrictions sur le champ magnétique).

Théorème 3 (Zeldovich)

Un champ de vitesse planaire $v = (v_x(x, y, z, t), v_y(x, y, z, t), 0)$ suffisamment régulier (C^∞ par exemple) ne peut pas amplifier un champ magnétique : comme précédemment, le champ magnétique décroît exponentiellement.

Démonstration 5

Pour un tel flot, les champs B_x et B_y peuvent-être alimentés grâce à la dépendance en z de B_z , mais ce dernier terme n'a pas de source.

Plus précisément :

La composante B_z vérifie alors l'équation de diffusion :

$$\partial_t B_z + v \cdot \nabla B_z = \varepsilon \Delta B_z, \quad (2.74)$$

donc B_z décroît exponentiellement (toujours la même estimation d'énergie que dans la section précédente). Ainsi, B prend la forme $B = \nabla \times (A e_z)$ où A vérifie :

$$\partial_t A + v \cdot \nabla A = \varepsilon \Delta A, \quad (2.75)$$

donc A décroît exponentiellement et B aussi.

Théorème 4

On considère maintenant le cas d'un champ de vitesse $v = v_T(r, \theta, \phi, t)$ purement toroïdal (c'est l'analogie du champ planaire). Un tel champ de vitesse ne peut entretenir une dynamo $B(r, \theta, \phi, t)$.

Démonstration 6

Comme v est toroïdal, on a $r \cdot v = 0$, donc l'équation d'induction s'écrit :

$$\partial_t (r \cdot B) + v_T \cdot \nabla (r \cdot B) = \varepsilon \Delta (r \cdot B). \quad (2.76)$$

On pose $Q = r \cdot B = L^2 P$ (cf (2.34)) Ainsi, Q vérifie dans V_i :

$$\partial_t Q^2 + \nabla \cdot (v_T Q^2) = 2\varepsilon \nabla \cdot (Q \nabla Q) - 2\varepsilon |\nabla Q|^2, \quad (2.77)$$

et en dehors :

$$0 = 2\varepsilon \nabla \cdot (Q \nabla Q) - 2\varepsilon |\nabla Q|^2. \quad (2.78)$$

En intégrant comme dans le cas planaire, on retrouve la même équation intégrée, donc $Q = 0$, donc la composante poloidale de B décroît exponentiellement. Ainsi :

$$\partial_t B_T = \nabla \times (v_T \times B_T) + \varepsilon \Delta B_T. \quad (2.79)$$

Avec $B_T = \nabla \times (rT)$, on a

$$\partial_t (rT) = -r(v_T \cdot \nabla T) + r\varepsilon \Delta T + \nabla G, \quad (2.80)$$

où ∇G est un gradient (qui contient entre autre $2\varepsilon\nabla T$) En prenant les composantes en ϕ et θ de l'équation, on obtient que G ne dépend que de r . On pose alors $\nabla G = rg(r, t)$, ce qui donne :

$$\partial_t T + v_T \cdot \nabla T = \varepsilon \Delta T + g(r, t). \quad (2.81)$$

En multipliant l'équation par $2T$ et en intégrant, on obtient de façon similaire au cas planaire $T = 0$.

Théorème 5 (Namikawa & Matsushita, admis)

On considère un champ radial $u = f(x)u_r$. Alors un effet dynamo ne peut pas être alimenté par ce champ.

La démonstration est faite dans [NM70].

3 Étude de nombres de Reynolds magnétique grands

3.1 Équation

On étudie ici on champ de vitesse indépendant du temps (et pour un fluide incompressible), et on s'intéresse au cas d'un nombre de Reynolds magnétique grand :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (v \times B) + \varepsilon \Delta B, \quad (3.1)$$

où $\varepsilon = \frac{1}{R_m}$.
Comme :

$$\nabla \times (v \times B) = B \cdot \nabla v - v \cdot \nabla B + (\nabla \cdot B)v + (\nabla \cdot v)B, \quad (3.2)$$

dans le cas d'un fluide incompressible (et en prenant en compte le fait que le champ B est à divergence nulle), on peut donc écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = B \cdot \nabla v - v \cdot \nabla B + \varepsilon \Delta B. \quad (3.3)$$

On note G la matrice de Green de ce problème, c'est-à-dire la fonction matricielle $G : (z, y, t) \mapsto G(z, y, t)$ solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t} = G \cdot \nabla v - v \cdot \nabla G + \varepsilon \Delta G \\ G(z, y, 0) = \delta(z - y)I_3 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Ainsi, pour $t > 0$, on a formellement :

$$B(z, t) = \int G(z, y, t) B_0(y) d^3 y. \quad (3.5)$$

On va donner un sens plus précis à ce noyau :

On note S_t le semi-groupe associé à l'équation d'induction :

Pour $t \geq 0$, S_t est l'application $B_0 \mapsto B(\cdot, t)$. Alors S_t définit une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$. De plus, pour tout $t \geq 0$, S_t est continu au sens suivant :

Pour tout compact K et tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$, il existe $C_K(u) \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$ à support dans K :

$$\|\langle S_t v, u \rangle\| \leq C_K(u) \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_\infty, \quad (3.6)$$

où, pour $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$, $w \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$,

$$\langle w, u \rangle = \begin{pmatrix} \langle w_1, u_1 \rangle \\ \langle w_2, u_2 \rangle \\ \langle w_3, u_3 \rangle \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Le lemme des noyaux de Schwartz (cf [Sch54]) s'applique donc :

Il existe une distribution $G_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^3$ (qu'on notera plus tard $G(\cdot, \cdot, t)$) telle que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3, \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3, \langle S_t v, u \rangle = \langle G_t, u \otimes v \rangle, \quad (3.8)$$

où $u \otimes v(y, z) = (u_i(z)v_j(y))_{i,j \leq 3}$.

De plus, ce noyau est de classe \mathcal{C}^∞ sur le complémentaire de la diagonale de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

L'existence est également étudiée dans [Sch50], et la régularité en dehors de la diagonale est démontrée dans ce même ouvrage, pages 228-229 théorème 8.

3.2 Formulation Lagrangienne

On note $z(x, t)$ le déplacement pendant t , dans le champ de vitesse, de la particule qui était initialement en x , c'est-à-dire que z est solution de :

$$\begin{cases} \dot{z} &= v(z) \\ z(0) &= x \end{cases}. \quad (3.9)$$

On note B^L le champ en coordonnées Lagrangiennes. On a la relation :

$$B^L(x, t) = B(z(x, t), t). \quad (3.10)$$

(Dans la suite de cette section, on notera z la coordonnée Eulérienne, pour éviter les confusions)

On a alors :

$$\frac{\partial B^L}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial B}{\partial t}(z(x, t)) + v(z(x, t)) \cdot \nabla B(z(x, t), t). \quad (3.11)$$

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial B^L}{\partial t}(x, t) = B^L(x, t) \cdot \nabla v(z(x, t)) + \varepsilon \Delta B(z(x, t), t). \quad (3.12)$$

3.3 Cas d'un fluide conducteur idéal

On se place dans le cas où $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire un fluide parfaitement conducteur : l'équation vérifiée par le champ Lagrangien prend alors la forme simple :

$$\frac{\partial B^L}{\partial t}(x, t) = B^L(x, t) \cdot \nabla v(z(x, t)). \quad (3.13)$$

On note $z(x, t) = g^t x$, et g_*^t sa différentielle (c'est-à-dire $(g_*^t(x))_{i,j} = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)(x, t)$). Alors une solution de l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$B^L(x, t) = g_*^t(x) B^L(x, 0). \quad (3.14)$$

Ou, pour le champ Eulérien :

$$B(g^t x, t) = g_*^t(x) B(x, 0). \quad (3.15)$$

Démonstration 7

On a en dérivant simplement (3.14) :

$$\partial_t B^L(x, t) = \partial_t (g_*^t x) B^L(x, 0) \quad (3.16)$$

$$= D(v)(g^t x) g_*^t x B^L(x, 0) \quad (3.17)$$

$$= B^L(x, t) \cdot \nabla v(g^t x). \quad (3.18)$$

Rappel : $D(v)$ désigne la jacobienne de v : pour $x, y \in \mathbb{R}^3$,

$$D(v)(x)y = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

alors que :

$$y \cdot \nabla v(x) = y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) + y_2 \frac{\partial v}{\partial x_2}(x) + y_3 \frac{\partial v}{\partial x_3}(x), \quad (3.20)$$

Remarque :

Physiquement, cela signifie que le champ magnétique est “figé” dans le fluide, dans le sens suivant : On note du un vecteur infinitésimal dans le même sens que le champ B^L , qui est “attaché” initialement par les deux extrémités à des particules en x et $x + dx$. Au bout d'un temps t , ce vecteur sera transformé en $g_*^t du$. La même matrice opère sur B^L , qui se “déplace” (en se dilatant) avec la particule dans le fluide. Avec les notations de la figure 1, on a pour un champ “figé” dans le fluide :

$$B^L(x, t + dt) = B^L(x, t) + v(z(x, t) + du(x, t)) dt - v(z(x, t)) dt. \quad (3.21)$$

Donc

$$\frac{\partial B^L}{\partial t} = B^L \cdot \nabla v(z(x, t)). \quad (3.22)$$

3.4 Retour au cas d'un fluide non idéal

On considère la quantité $\Lambda_t(x) = (g_*^t)^*(x) g_*^t(x)$ (ainsi, un vecteur u “figé” dans le fluide en x a pour longueur $(\Lambda_t(x)u, u)$ au bout d'un temps t).

Avec les notations précédentes,

$$(\Lambda_t(x))_{k,j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z^i}{\partial x^k}(x, t) \frac{\partial z^i}{\partial x^j}(x, t). \quad (3.23)$$

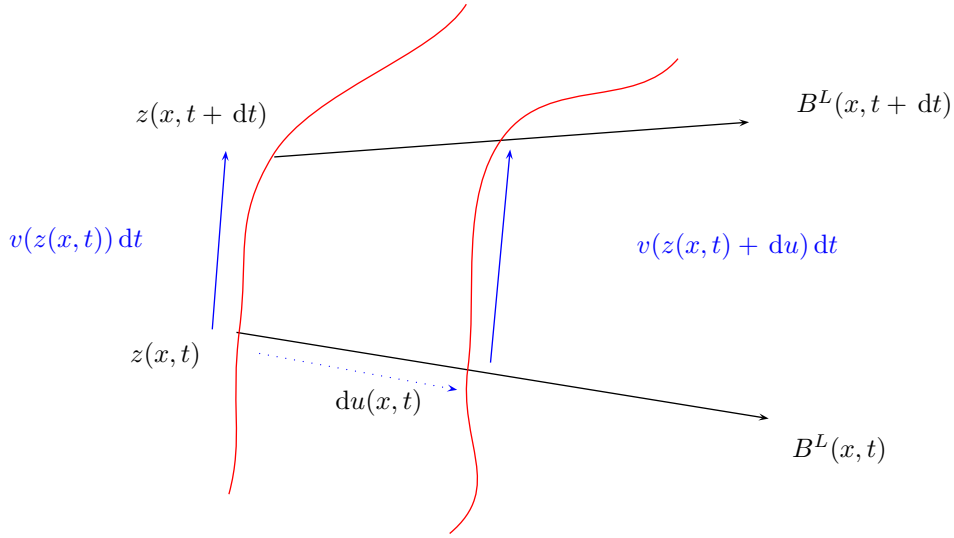


FIG. 1 –

On termine la transformation de l'équation (3.3) en formulation Lagrangienne, en adaptant un peu la formule (avec $\varepsilon \neq 0$) :

On définit $B^H(w, t)$ par

$$B(z, t) = g_*^t(g^{-t}z)B^H(g^{-t}z, t), \quad (3.24)$$

soit

$$B(g^t w, t) = g_*^t(w)B^H(w, t). \quad (3.25)$$

On dérive par rapport à t :

$$\partial_t B(g^t w, t) + v(g^t w) \cdot \nabla B(g^t w, t) = \partial_t (g_*^t(w))B^H(w, t) + g_*^t(w)\partial_t B^H(w, t) \quad (3.26)$$

$$= D(v)(g^t w)g_*^t(w)B^H(w, t) + g_*^t(w)\partial_t B^H(w, t) \quad (3.27)$$

$$= B(g^t w, t) \cdot \nabla v(g^t w) + g_*^t(w)\partial_t B^H(w, t). \quad (3.28)$$

Donc l'équation (3.3) devient :

$$g_*^t(w)\partial_t B^H(w, t) = \varepsilon \Delta B(g^t w, t) = -\varepsilon \nabla \times \nabla \times B(g^t w, t) + \varepsilon \nabla(\nabla \cdot B)(g^t w, t). \quad (3.29)$$

On retourne à la variable Eulérienne :

$$g_*^t(g^{-t}z)\partial_t B^H(g^{-t}z, t) = -\varepsilon \nabla \times \nabla \times B(z, t) + \varepsilon \nabla(\nabla \cdot B)(z, t) \quad (3.30)$$

$$= -\varepsilon \nabla \times \nabla \times [g_*^t(g^{-t}z)B^H(g^{-t}z, t)] + \varepsilon \nabla(\nabla \cdot B)(z, t). \quad (3.31)$$

On va montrer que pour une fonction vectorielle f (en les variables z, t), on a :

$$(g_*^{-t}(g^{-t}z))\nabla \times f(z, t) = \nabla \times ((g_*^t \cdot)^* f^L)(x, t), \quad (3.32)$$

où $z = g^t x$, $f^L(x, t) = f(g^t x, t)$, ou de façon équivalente :

$$\nabla \times f(z, t) = g_*^t x \nabla \times ((g_*^t \cdot)^* f^L)(x, t). \quad (3.33)$$

Remarque : dans cette équation, la dérivation spaciale dans le membre de droite porte sur la variable x , et celle dans le membre de gauche sur la variable z .

En effet, la j -ème ligne du membre de gauche s'écrit :

$$\sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{j,k,l} \frac{\partial f_l}{\partial z_k}(z, t), \quad (3.34)$$

où $\varepsilon_{1,2,3} = 1$ et ε est antisymétrique.

La j -ème ligne du membre de droite s'écrit :

$$\sum_{i=1}^3 (g_*^t x)_{j,i} \sum_{k,l=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial ((g_*^t \cdot)^* f^L)_l}{\partial x_k}(x, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x, t) \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial ((g_*^t \cdot)^*_{l,m} f_m^L)}{\partial x_k}(x, t) \quad (3.35)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x, t) \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial (\frac{\partial z_m}{\partial x_l} f_m^L)}{\partial x_k}(x, t), \quad (3.36)$$

et

$$\sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial (\frac{\partial z_m}{\partial x_l} f_m^L)}{\partial x_k}(x, t) = \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial^2 z_m}{\partial x_l \partial x_k}(x, t) f_m^L(x, t) + \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial z_m}{\partial x_l}(x, t) \frac{\partial f_m^L}{\partial x_k}(x, t) \quad (3.37)$$

$$= \sum_{k,l,m=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial z_m}{\partial x_l}(x, t) \frac{\partial f_m^L}{\partial x_k}(x, t), \quad (3.38)$$

car ε est antisymétrique.

Comme

$$\frac{\partial f_m^L}{\partial x_k}(x, t) = \sum_{p=1}^3 \frac{\partial z_p}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial f_m}{\partial z_p}(z(x, t), t), \quad (3.39)$$

on a pour le membre de droite :

$$\sum_{i,k,l,m,p=1}^3 \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x, t) \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial z_m}{\partial x_l}(x, t) \frac{\partial z_p}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial f_m}{\partial z_p}(z(x, t), t), \quad (3.40)$$

avec

$$\sum_{i,k,l=1}^3 \varepsilon_{i,k,l} \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial z_p}{\partial x_k}(x, t) \frac{\partial z_m}{\partial x_l}(x, t) = \varepsilon_{j,p,m}, \quad (3.41)$$

par conservation du volume et de l'orientation pour le changement de coordonnées.
Il reste donc

$$\sum_{m,p=1}^3 \varepsilon_{j,p,m} \frac{\partial f_m}{\partial z_p}(z(x,t), t), \quad (3.42)$$

ce qui montre l'identité.

Ainsi, la partie rotationnelle de l'équation vérifiée par B^H devient (en multipliant par $g_*^{-t}(g^{-t}z)$) :

$$g_*^{-t}(g^{-t}z) \nabla_z \times \nabla_z \times B(z, t) = \nabla_x \times (\Lambda_t \nabla_x \times (\Lambda_t B^H))(x, t). \quad (3.43)$$

On procède de même pour l'autre partie de l'équation. On arrive alors à l'équation :

$$\frac{\partial B^H}{\partial t} = -\varepsilon \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t B^H + \varepsilon \Lambda_t^{-1} \nabla (\nabla \cdot B^H), \quad (3.44)$$

(on note L l'opérateur différentiel correspondant, $L = -\partial_t - \varepsilon \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t + \varepsilon \Lambda_t^{-1} \nabla (\nabla \cdot)$), avec comme condition initiale

$$B_0^H(x) = B^H(x, 0) = B(x, 0) = B_0(x). \quad (3.45)$$

3.5 Étude du noyau de Green

Dans cette sous-section, on n'étudiera que le champ magnétique transformé, et on supprimera donc l'exposant H pour ne pas alourdir les notations.

On note $\Gamma(x, y, t)$ le noyau de Green de l'équation (3.44). On a ainsi la relation :

$$G(z, y, t) = g_*^t(g^{-t}z) \Gamma(g^{-t}z, y, t). \quad (3.46)$$

On cherche à décomposer le noyau $\Gamma(x, y, t)$ sous la forme

$$\Gamma(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i \frac{(x-y) \cdot \xi}{\sqrt{\varepsilon}}\right) a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi, \quad (3.47)$$

où le symbole matriciel $a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon})$ est développé en une série

$$a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi, t) \sqrt{\varepsilon}^j. \quad (3.48)$$

Justification de l'expression de Γ :

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $a(x, \xi, t)$ le symbole associé à l'opérateur pseudo-différentiel de noyau $\Gamma(\cdot, \cdot, t)$ (Γ est bien le noyau d'un opérateur pseudo-différentiel car G en est un), c'est-à-dire tel que

$$B(x, t) = a(x, D, t) B_0(x) = \int \Gamma(x, y, t) B_0(y) d^3y. \quad (3.49)$$

On a alors, formellement :

$$\begin{aligned} a(x, D, t) B_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{B}_0(\xi) d^3\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \int e^{-iy \cdot \xi} B_0(y) d^3y d^3\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) B_0(y) d^3y d^3\xi. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Le noyau peut donc être écrit sous la forme

$$\Gamma(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(\mathbf{i}(x - y) \cdot \xi) a(x, \xi, t) d^3\xi. \quad (3.51)$$

Cette expression obtenue formellement a bien un sens dès que $x \neq y$ grâce aux intégrales oscillantes (cf. le théorème en appendice 4.2) On remplace alors l'opérateur $a(x, D, t)$ par $\tilde{a}(x, \sqrt{\varepsilon}D, t, \sqrt{\varepsilon})$ et on obtient par changement de variable :

$$\Gamma(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{(x - y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \tilde{a}(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi. \quad (3.52)$$

On utilise ensuite le développement asymptotique de $\tilde{a}(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon})$ (en $\sqrt{\varepsilon}$).

Pour satisfaire les conditions initiales $\Gamma(x, y, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta(x - y)$, on prend $a_0(x, \xi, 0) = I_3$ et $a_j(x, \xi, 0) = 0$ pour $j > 0$

Les coefficients $a_j(x, \xi, t)$ satisfont un système d'équations de transport. On note $\Gamma_N(x, y, t)$ une approximation de (3.47) où seuls N termes de la série sont pris, et B_N le champ correspondant.

Théorème 6

On considère un champ de vecteurs $v \in \mathcal{C}^\infty$ nul en dehors d'un ouvert borné Ω . Alors :

- Le système d'équations de transport se résout de manière unique.
- Le terme principal s'écrit sous la forme :

$$a_0(x, \xi, t) = \exp\left(-\left(\int_0^t \Lambda_\tau^{-1}(x) d\tau\right) \xi, \xi\right). \quad (3.53)$$

- Les termes suivants s'écrivent sous la forme :

$$a_N(x, \xi, t) = P_N(x, \xi, t) a_0(x, \xi, t), \quad (3.54)$$

où $P_N(x, \xi, t)$ est un polynôme de degré maximal $3N$ en ξ à coefficients matriciels \mathcal{C}^∞

- Pour $T > 0$ fixé, on a l'estimation uniforme en $t \in [0, T]$ pour le reste :

$$\|\Gamma(t) - \Gamma_N(t)\| = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}^N). \quad (3.55)$$

Démonstration 8

On va décomposer l'équation différentielle vérifiée par Γ pour les a_i , et on identifiera les termes de même ordre en $\sqrt{\varepsilon}$.

On a, par linéarité de l'intégration :

$$\Lambda_t \Gamma(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{(x - y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi, \quad (3.56)$$

puis en dérivant :

$$\begin{aligned} \nabla \times \Lambda_t \Gamma &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{(x - y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \nabla \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon})) d^3\xi \\ &+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{(x - y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon})) d^3\xi, \end{aligned} \quad (3.57)$$

et on refait la même chose pour chaque terme :

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t \Gamma \\
&= \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \nabla \times (\Lambda_t \nabla \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}))) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \times \Lambda_t \nabla \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon})) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{-1}{\varepsilon} \xi \times \Lambda_t (\xi \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}))) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla \times \Lambda_t (\xi \times (\Lambda_t a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}))) d^3\xi.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Le deuxième terme de l'équation donne :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \Gamma &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \nabla \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

puis

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot \Gamma) &= \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \nabla \nabla \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \xi \nabla \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}} \nabla \xi \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi \\
&+ \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(i\frac{(x-y)}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) \frac{-1}{\varepsilon} \xi \xi \cdot a(x, \xi, t, \sqrt{\varepsilon}) d^3\xi.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

En séparant chaque puissance de $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient ainsi l'équation vérifiée par chacun des a_N :

$$\begin{aligned}
\dot{a}_N &= -(\Lambda_t^{-1} \xi, \xi) a_N - i \xi \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t a_{N-1} - \nabla \times \Lambda_t (i \xi \times \Lambda_t a_{N-1}) \\
&+ i \Lambda_t^{-1} \xi \nabla \cdot a_{N-1} + i \Lambda_t^{-1} \nabla(\xi, a_{N-1}) + \Lambda_t^{-1} \nabla \nabla \cdot a_{N-2} \\
&- \nabla \times \Lambda_t \nabla \times \Lambda_t a_{N-2},
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ce qui donne déjà l'existence et l'unicité de la solution du système.

En particulier le premier terme donne :

$$\dot{a}_0 = -(\Lambda_t^{-1} \xi, \xi) a_0, \tag{3.62}$$

d'où l'expression de la solution (avec $a_0(x, \xi, 0) = I_3$).

Le polynôme P_N se calcule par récurrence :

Pour $N \geq 1$, l'équation de transport s'écrit :

$$\dot{a}_N + (\Lambda_t^{-1} \xi, \xi) a_N = Q_N(x, \xi, t) a_0(x, \xi, t), \tag{3.63}$$

où Q_N est polynomial. Dans l'expression de l'équation de transport, on a au plus une dérivée spatiale sur a_{N-1} et deux sur a_{N-2} . Par ces dérivées, le degré augmente donc au plus de 2 en ξ pour a_{N-1} et 4 pour a_{N-2} . On a de plus un produit par ξ pour les termes en a_{N-1} , donc Q_N est de degré au plus $\max(3(N-1) + 3, 3(N-2) + 4) = 3N$. La résolution de l'équation donne ensuite $\dot{P}_N(x, \xi, t) = Q_N$, donc P_N a le même degré en ξ que Q_N , ce qui achève la récurrence.

Il reste à montrer l'estimation (on se contentera du cas $N = 1$, qui est le seul dont on a besoin ; la preuve s'adapte ensuite au cas générique, par récurrence) :

On a, par linéarité de l'équation :

$$L(\Gamma_1 - \Gamma) = L(\Gamma_1). \quad (3.64)$$

Et, en remplaçant a_1 par son expression en fonction de a_0 :

$$L(\Gamma_1) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) (-\partial_t a_0(x, \xi, t) - (\Lambda_t^{-1} \xi, \xi) a_0(x, \xi, t)) \, d^3\xi \quad (3.65)$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) (\Lambda_t^{-1} \mathbf{i} \xi \cdot \nabla \cdot a_0(x, \xi, t) + \Lambda_t^{-1} \nabla(\mathbf{i} \xi \cdot a_0(x, \xi, t))) \, d^3\xi \quad (3.66)$$

$$+ \varepsilon \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) (\Lambda_t^{-1} \nabla(\nabla \cdot a_0(x, \xi, t))) \, d^3\xi \quad (3.67)$$

$$- \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) (\mathbf{i} \xi \times \Lambda_t(\nabla \times \Lambda_t a_0(x, \xi, t)) + \nabla \times \Lambda_t(\mathbf{i} \xi \times \Lambda_t a_0(x, \xi, t))) \, d^3\xi \quad (3.68)$$

$$- \varepsilon \frac{1}{(2\pi\sqrt{\varepsilon})^3} \int \exp\left(\mathbf{i} \frac{x-y}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \xi\right) (\nabla \times \Lambda_t(\nabla \times \Lambda_t a_0(x, \xi, t))) \, d^3\xi. \quad (3.69)$$

On reconnaît dans le premier terme l'équation vérifiée par a_0 , qui s'annule donc. En ce qui concerne les autres termes, chacun est dominé par $\sqrt{\varepsilon}$ ou ε (on a calculé explicitement a_0 , et le théorème de Calderon-Vaillancourt – cf. [CV71] – s'applique ici), donc en tant que norme d'opérateur :

$$\|L(\Gamma - \Gamma_1)\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}). \quad (3.70)$$

Ainsi, pour le champ magnétique approché :

$$\|L(B_1 - B)\|_{L^2} = \|L(B_1)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \|B_0\|_{L^2}. \quad (3.71)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_t(B_1 - B), L(B_1 - B) \rangle_{L^2} &= \langle \Lambda_t(B_1 - B), -\partial_t(B_1 - B) \rangle \\
&\quad - \varepsilon \langle \Lambda_t(B_1 - B), \nabla \times \Lambda_t(\nabla \times \Lambda_t(B_1 - B)) \rangle \\
&\quad + \varepsilon \underbrace{\langle \Lambda_t(B_1 - B), \Lambda_t^{-1} \nabla(\nabla \cdot (B_1 - B)) \rangle}_{= -\|\nabla \cdot (B_1 - B)\|_{L^2}} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Lambda_t(B_1 - B), (B_1 - B) \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle \dot{\Lambda}_t(B_1 - B), (B_1 - B) \rangle \\
&\quad - \varepsilon \langle \Lambda_t(\nabla \times \Lambda_t(B_1 - B)), \nabla \times \Lambda_t(B_1 - B) \rangle \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla \cdot (B_1 - B)\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Lambda_t(B_1 - B), (B_1 - B) \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle \dot{\Lambda}_t(B_1 - B), (B_1 - B) \rangle \\
&\quad - \varepsilon \langle \Lambda_t(\nabla \times \Lambda_t(B_1 - B)), \nabla \times \Lambda_t(B_1 - B) \rangle \\
&\quad - \varepsilon \|\nabla \cdot (B_1 - B)\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Par inégalité de Schwartz, et comme les deux termes en ε sont négatifs, on a alors :

$$\frac{d}{dt} \langle \Lambda_t(B_1 - B), B_1 - B \rangle \leq C \langle \Lambda_t(B_1 - B), B_1 - B \rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \|B_1 - B\|_2 \|B_0\|_2 \tag{3.74}$$

Puis par le lemme de Gronwall (on a $\|B(\cdot, t) - B_0\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $\|B_1(\cdot, t) - B_0\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$), on arrive donc à :

$$\|\Gamma_1 B_0 - \Gamma B_0\| = \|B_1 - B\|_2 \leq Ct\varepsilon^{1/2} \|B_0\|_2, \tag{3.75}$$

l'où l'estimation pour la norme de l'opérateur $\Gamma_1 - \Gamma$.

3.6 Théorème anti-dynamo

Définition 1 (Exposant de Lyapunov)

Soient x une position dans l'espace, et η un vecteur "figé" en x (dans le sens vu précédemment). On pose alors :

$$\chi(x, \eta) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |g_*^t(x)\eta| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log(\Lambda_t(x)\eta, \eta) \tag{3.76}$$

Cet exposant correspond à l'exposant qui traduit la croissance du vecteur η suivant le champ de vitesses en partant de x à l'infini (en temps).

Théorème 7 (Vishik)

Si les lignes de champ du champ de vitesse ne divergent pas exponentiellement à l'infini, alors seule une dynamo lente est possible, c'est-à-dire que pour des nombres de Reynolds magnétiques arbitrairement grands, le champs magnétique a une croissance exponentielle de plus en plus faible. En d'autres termes, si l'exposant de Lyapunov du champ de vitesses est nul en tout point de l'espace, alors une dynamo rapide ne peut exister :

$$\forall (x, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \chi(x, \eta) = 0 \Rightarrow \forall \lambda > 0, \exists \mu > 0, \forall \varepsilon < \mu, \|B(\cdot, t)\|_{L^2} \leq Ce^{\lambda t} \tag{3.77}$$

Démonstration 9

Supposons qu'on ait au contraire une dynamo rapide pour un exposant de Lyapunov nul partout. Soit $T > 0$ suffisamment grand. Alors il existe une suite ε_i tendant vers 0 et des modes propres du champ magnétique croissant exponentiellement à des vitesses $\lambda_i \geq \lambda > 0$. Alors d'une part

$$\|G(T)\|_2 \geq e^{\lambda T}. \quad (3.78)$$

(Il suffit de prendre le mode propre correspondant).

Et d'autre part d'après les résultats de la sous-section précédente :

$$\|G(T)\|_2 \leq (1 + O(\sqrt{\varepsilon_i}))e^{\lambda T/2}. \quad (3.79)$$

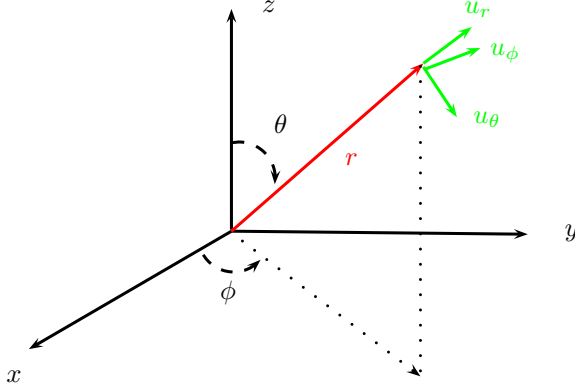
(Car $\|g_*^T\| \leq e^{\lambda/2T}$ pour T assez grand). On a une contradiction pour T, i suffisamment grands.

Références

- [AG91] S. Alinhac and P. Gerard. *Opérateurs pseudo-différentiels et theoreme de Nash-Moser*. InterEditions; Editions du CNRS, 1991.
- [Bor05] P. Boronski. Méthode des potentiels poloïdal-toroïdal appliquée à l'écoulement de Von Kármán en cylindre fini. 2005.
- [CV71] Alberto-P. Calderón and Rémi Vaillancourt. On the boundedness of pseudo-differential operators. *J. Math. Soc. Japan*, 23 :374–378, 1971.
- [EZ] L.C. Evans and M. Zworski. Lectures on semiclassical analysis. *Lecture note*.
- [FP03] S. Fauve and F. Petrelis. The dynamo effect. *Peyresq lectures on nonlinear phenomena volume 2*, page 1, 2003.
- [Gil03] A.D. Gilbert. Dynamo theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, 2 :355–441, 2003.
- [GV06] D. Gerard-Varet. Oscillating solutions of incompressible magnetohydrodynamics and dynamo effect. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(3) :815–840, 2006.
- [Hwa87] IL Hwang. The L^2 -Boundedness of Pseudodifferential Operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 55–76, 1987.
- [Mof78] HK Moffatt. *Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1978.
- [NM70] T. Namikawa and S. Matsushita. Kinematic dynamo problem. *Geophysical Journal International*, 19(4) :395–415, 1970.
- [Rob87] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*. Birkhäuser, 1987.
- [Sch50] L. Schwartz. Theorie des noyaux. *Int. Cong. Math., Cambridge*, pages 220–230, 1950.
- [Sch54] L. Schwartz. *Séminaire Schwartz....* Secrétariat mathématique, 1954.
- [VF93] MM Vishik and S. Friedlander. Dynamo theory methods for hydrodynamic stability. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 72(2) :145–180, 1993.
- [Vis89] MM Vishik. Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 48(1) :151–167, 1989.

4 Formulaire, appendice

4.1 Dérivées spatiales en coordonnées sphériques



$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_r f \\ \frac{1}{r} \partial_\theta f \\ \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi f \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_\phi \quad (4.2)$$

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (A_\phi \sin \theta) - \partial_\phi A_\theta) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi A_r - \frac{1}{r} \partial_r (r A_\phi) \\ \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\theta) - \partial_\theta A_r) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

4.2 Intégrales oscillantes

On va donner dans cette sous-section un sens à des intégrales de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta. \quad (4.4)$$

Lemme 2

Soit K un compact de \mathbb{R}^N , $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ réelle telle que $|\nabla\varphi(\theta)| \geq c_0 > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^N$. Alors :

$$\forall a \in \mathcal{C}_0^\infty(K), \forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda \geq 1, \lambda^k \left| \int e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta \right| \leq C_{k+1}(\varphi) C(c_0, K) \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha a|, \quad (4.5)$$

où $C_{k+1}(\varphi)$ reste bornée lorsque φ reste bornée dans $\mathcal{C}^{k+1}(K)$.

Démonstration 10

On considère l'opérateur différentiel

$$L = -\frac{i}{|\nabla\varphi|^2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}. \quad (4.6)$$

Ainsi, $L(e^{i\lambda\varphi}) = \lambda e^{i\lambda\varphi}$, $L^k(e^{i\lambda\varphi}) = \lambda^k e^{i\lambda\varphi}$, donc

$$\lambda^k \int e^{i\lambda\varphi} a \, d\theta = \int L^k(e^{i\lambda\varphi}) a \, d\theta = \int e^{i\lambda\varphi} ({}^tL)^k(a) \, d\theta, \quad (4.7)$$

où

$${}^tL(a) = i \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{1}{|\nabla\varphi|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} a \right). \quad (4.8)$$

(Donc $({}^tL)^k$ est un opérateur différentiel d'ordre au plus k).

Comme a est à support compact inclus dans K , on a :

$$\left| \lambda^k \int e^{i\lambda\varphi} a \, d\theta \right| \leq |K| \sup |({}^tL)^k a|. \quad (4.9)$$

Et par récurrence sur k , on a $\sup |({}^tL)^k a| \leq C_{k+1}(\varphi) C(c_0) \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha a|$.

On définit alors pour $\rho \in]-\infty, 1]$ et $m \in \mathbb{R}$ l'espace $A_\rho^m(\mathbb{R}^N)$ des fonctions a de classe C^∞ telles que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\partial^\alpha a(\theta)| \leq C_\alpha (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha|}, \quad (4.10)$$

muni des semi-normes $N_{\rho,k}^m$ qui minimisent les C_α .

Remarque : $A_\rho^m \subset A_\rho^{m'}$ pour $m \leq m'$, $\bigcap_{m \in \mathbb{R}} A_\rho^m = \mathcal{S}$ (espace de Schwartz), dense dans tous les A_ρ^m .

Théorème 8

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, homogène de degré $\mu > 0$. On note $I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi} a \, d\theta$, bien définie sur A_ρ^m si $m < -N$.

On suppose de plus que $\nabla\varphi(\theta) \neq 0$ pour $\theta \neq 0$.

Alors si $\mu > 1 - \rho$, I_φ se prolonge par continuité à A_ρ^m pour tout $m \in \mathbb{R}$, et ce prolongement est unique par densité de \mathcal{S} dans ces espaces.

Démonstration 11

Il existe χ_0, χ fonctions C^∞ à supports compacts respectivement dans $\{|\theta| \leq 1\}$ et $\{\frac{1}{2} \leq |\theta| \leq 2\}$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^N, \chi_0(\theta) + \sum_{p=0}^{\infty} \chi(2^{-p}\theta) = 1. \quad (4.11)$$

(Il suffit par exemple de prendre χ_1 , positive, valant 1 sur $\{\frac{2}{3} \leq |\theta| \leq \frac{5}{3}\}$ à support dans $\{\frac{1}{2} \leq |\theta| \leq 2\}$. On a alors en tout point une somme finie de termes non nuls dans la série, qui est donc bien définie et strictement positive. On pose alors $\chi(\theta) = \frac{1}{\sum_{p=0}^{\infty} \chi_1(2^{-p}\theta)}$ si $|\theta| \geq 1$, $\chi = \chi_1$ sinon, puis $\chi_0 = 1 - \chi$ est à support dans la boule unité)

On pose alors

$$I_\varphi(a) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi} \chi_0 a + \sum_{p=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi} \chi(2^{-p}\cdot) a \quad (4.12)$$

Cette définition a bien un sens si $m < -N$ et coïncide avec la première définition. Il reste donc à montrer la convergence de la série dans les autres espaces (la continuité en découle alors).

On a une estimation pour tout k du terme général de la série, après changement de variable $\theta \mapsto 2^p \theta$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\varphi(\theta)} \chi(2^{-p}\theta) a(\theta) \, d\theta \right| = \left| 2^{Np} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i2^{p\mu}\varphi(\theta)} \chi(\theta) a(2^p\theta) \, d\theta \right| \quad (4.13)$$

$$\leq C_{k+1} 2^{Np-p\mu k} \sup_{|\alpha| \leq k, \frac{1}{2} \leq |\theta| \leq 2} 2^{p|\alpha|} |\partial^\alpha a(2^p\theta)| \quad (4.14)$$

$$\leq C_{k+1} 2^{p(N-\mu k+m+(1-\rho)k)} N_{\rho,k}^m(a) \quad (4.15)$$

Et en choisissant k tel que $N + m - k(\mu - 1 + \rho) < 0$, on a donc convergence géométrique dès que $\mu > 1 - \rho$.