

**Feuille de TD 7**  
Espaces Euclidiens

**Exercice 1 :**

Orthonormaliser dans  $\mathbb{R}^3$  la famille  $u_1 = (1, -2, -2)$ ,  $u_2 = (-1, 0, -1)$  et  $u_3 = (5, -3, 7)$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^5$  engendré par  $u = (1, 2, 3, -1, 2)$  et  $v = (2, 4, 7, 2, -1)$ . Trouver une base de l'orthogonal  $F^\perp$  de  $F$ .

**Exercice 3 :**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  définit un produit scalaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^3$ . Construire une base orthonormale pour  $\varphi$ .

2. Considérons la base  $(u_1, u_2, u_3)$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , où

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (0, 0, 1).$$

Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour transformer  $\{u_i\}$  en une base orthonormale.

**Exercice 4 :**

$\mathbb{R}^4$  est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient  $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1, -1)$  et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ .

1. Déterminer une base orthonormale de  $F$ .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  du projecteur orthogonal sur  $F$ .
3. Déterminer la distance du vecteur  $(1, 1, 1, 1)$  au sous-espace vectoriel  $F$ .
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

**Exercice 5 :**

Montrer que l'application  $(A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$  de  $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

**Exercice 6 :**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + y + z = 0$  de  $(1, 0, 0)$ , et plus généralement d'un vecteur  $(x, y, z)$  quelconque. Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

**Exercice 7 :**

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 0$ . Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

**Exercice 8 :**

Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - (ax + b))^2 dx$ .

**Exercice 9 :**

Dans un espace euclidien de dimension  $n$ , on considère un sous-espace  $F$  de dimension  $r$  et  $(f_1, \dots, f_r)$  une base orthonormée de cet espace. On note  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ , c'est à dire la projection sur  $F$  associée à la décomposition  $E = F \oplus F^\perp$ .

Montrer que :

$$\forall v \in F, \quad p_F(v) = \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, f_2 \rangle f_2 + \dots + \langle v, f_r \rangle f_r.$$

**Exercice 10 :**

Soient  $E = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $I_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

1. Montrer que l'intégrale  $I_n$  est convergente. Que vaut  $I_{2p+1}$ ?

Soit  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

2. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
3. On suppose  $n = 2$ . Écrire la matrice associée à  $\varphi$  dans la base  $(1, X, X^2)$ . Construire une base orthonormale  $(P_0, P_1, P_2)$  par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à  $(1, X, X^2)$ .

**Exercice 11 :**

On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}_2[X]$  du produit scalaire  $\phi$  défini sur  $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$  par

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer la distance du polynôme  $P = X^2 + X + 1$  au sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  formé des polynômes  $f$  tels que  $f'(0) = 0$ .

**Exercice 12 :**

A deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt + P(0)Q(0).$$

1. Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Lorsque  $n = 2$ , donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

**Exercice 13 :**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la manière suivante : si  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$  alors

$$f(u, u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que  $f$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $P$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  d'équation cartésienne  $2x - y + z = 0$ .
  - (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel  $P$ .
  - (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  dont l'orthogonal est  $P$ .
3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  pour  $f$ .