

Feuille de TD 4
Calcul d'Intégrales Doubles et Triples

Exercice 1 :

Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1 + \frac{x^2}{2}\}$. Montrer que D est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D (x^2 + x + 3) dx dy.$$

Exercice 2 :

Soit D la partie de \mathbb{R}^2 comprise entre l'axe des x , la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = 2 - x$. Montrer que D est un domaine quarrable.

Calculer

$$I := \iint_D y dx dy.$$

Exercice 3 :

Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer (directement) $I := \iint_D (x - y) dx dy$.

2. Calculer I au moyen du changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 4 :

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D xy\sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dans les deux cas suivants :

1. D est défini par $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

2. D est défini par $x^2 + 2y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Dans le deuxième cas, on vérifiera la formule de Fubini i.e. qu'intégrer suivant la variable x puis y donne le même résultat que si on intègre d'abord suivant la variable y puis x .¹

1. Résultat du 2. : $\frac{2\sqrt{2}-1}{30\sqrt{2}}$.

Exercice 5 (Calculer les intégrales) :

$$I_1 = \iint_{D_1} (x+y)e^{-x}e^{-y} dx dy \quad \text{où} \quad D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0; x+y \leq 1\}.$$

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{où} \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < x; y < x^2 + y^2\}.$$

$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy \quad \text{où} \quad D_3 = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

$$I_4 = \iint_{D_4} \frac{1}{y \cos x + 1} dx dy \quad \text{où} \quad D_4 = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{1}{2}].$$

$$I_5 = \iint_{D_5} xy dx dy \quad \text{où} \quad D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \text{ avec } a, b > 0.$$

$$I_6 = \iiint_{D_6} z dx dy dz \quad \text{où} \quad D_6 = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid y^2 + z \leq 1; x^2 + z \leq 1\}.$$

Exercice 6 :

Soit $D = [0,1]^2$. Calculer

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}.$$

Exercice 7 :

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0; x^2 + y^2 - 2y \geq 0; x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$. Calculer

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Exercice 8 :

Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2; x \geq y^2\}$.

1. Dessiner D . Montrer que D est un domaine quarrable.
2. Calculer l'intégrale double

$$I := \iint_D \frac{dx dy}{(4x + 4y + 1)^2}.$$

Exercice 9 :

Calculer

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{2x+1}}.$$