

Correction du partiel

Exercice 1 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, t) = \ln(1 + e^{x+t})$. f est continue comme somme et composée de fonctions continues (la fonction $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto e^{x+t}$ est déjà un composé de l'exponentielle avec la fonction polynomiale $(x, t) \rightarrow x + t$. La fonction $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto 1 + e^{x+t}$ est la somme de la fonction constante 1 sur \mathbb{R} et de la fonction f_1 , et f la composée de la fonction $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ avec la fonction f_2 , en remarquant que $f_2(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$). De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables et on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{e^{x+t}}{1 + e^{x+t}}$$

Enfin, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue comme composée et quotient de fonctions continues. Par restriction à $\mathbb{R} \times [0, 1]$, f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont également continues. On en déduit que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt,$$

grâce au théorème de dérivation sous le signe \int .

2. En fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est aussi dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{e^{x+t}}{1 + e^{x+t}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt = [f(x, t)]_{t=0}^1 = f(x, 1) - f(x, 0) \\ &= \ln(1 + e^{x+1}) - \ln(1 + e^x) = \ln\left(\frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x}\right) \end{aligned}$$

3. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a les implications :

$$e^{x+t} > 0 \implies 1 + e^{x+t} > 1 \implies \ln(1 + e^{x+t}) > \ln(1) = 0 \implies F(x) = \int_0^1 \ln(1 + e^{x+t}) dt > 0$$

(En effet, si $F(x) = 0$, comme la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue et positive, on a $\forall t \in [0, 1], \ln(1 + e^{x+t}) = 0$, ce qui contredit l'inégalité ci-dessus). De plus, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} > 1$ (car $e^{x+1} > e^x$), on a

$$F'(x) = \ln\left(\frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x}\right) > \ln 1 = 0.$$

F est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. • On a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, 1 + e^{x+t} \geq e^{x+t},$$

et donc $f(x, t) = \ln(1 + e^{x+t}) \geq \ln(e^{x+t}) = x + t$. Alors

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \geq \int_0^1 (x + t) dt = x + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{2}) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

• Par ailleurs, on sait que $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$, et donc $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \ln(1 + e^{x+t}) \leq e^{x+t}$.
Alors

$$F(x) = \int_0^1 \ln(1 + e^{x+t}) dt \leq \int_0^1 e^{x+t} dt = [e^{x+t}]_{t=0}^1 = e^{x+1} - e^x = e^x(e - 1).$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(e - 1) = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ (car $F(x) \geq 0$).

5. On a aussi

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, e^{x+t} \geq e^0 = 1,$$

et donc $2e^{x+t} \geq 1 + e^{x+t}$. Alors :

$$\ln(2) + x + t = \ln(2) + \ln(e^{x+t}) = \ln(2e^{x+t}) \geq \ln(1 + e^{x+t}) = f(x, t),$$

donc

$$\ln(2) + x + \frac{1}{2} = \int_0^1 (\ln(2) + x + t) dt \geq \int_0^1 f(x, t) dt = F(x).$$

Ainsi, grâce à la question 4, on a

$$\forall x \geq 0, \ln(2) + x + \frac{1}{2} \geq F(x) \geq x + \frac{1}{2}.$$

Si $x > 0$, $1 + \frac{1}{x}(\ln(2) + \frac{1}{2}) \geq \frac{F(x)}{x} \geq 1 + \frac{1}{2x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x}(\ln 2 + \frac{1}{2}) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2x})$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1$ et donc $F(x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 :

1. Pour $\alpha \in \{2, 3\}$, on a $\frac{1}{(x+t)^\alpha} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ (car pour $t > 0$, $\frac{1}{(x+t)^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha(1+\frac{x}{t})^\alpha}$ où $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{t})^\alpha = 1$). Or, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge (puisque $\alpha > 1$) et $\frac{1}{(x+t)^\alpha} > 0$. Donc l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^\alpha}$ converge, ainsi que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^\alpha}$. D'où la conclusion voulue.

2.

$$\forall t > 0, \left| \frac{\sin t}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+t)^2}.$$

Or, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2}$ converge. Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(t+x)^2} dt$ converge absolument, et a fortiori elle converge.

3. • Notons $f :]1, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^2}$. f est continue comme quotient de fonctions continues (la fonction $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \sin t$ est continue par composition de la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto t$, et la fonction $f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto (x+t)^2$ est continue car elle est polynomiale. Enfin, par restriction, f_1 et f_2 restent continues sur $]1, +\infty[\times]0, +\infty[$.

- Pour chaque $t \geq 0$, la fonction $]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin t}{(x+t)^2}$ est dérivable car c'est une fraction rationnelle, et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{2 \sin t}{(x+t)^3}$.
- La fonction $\frac{\partial f}{\partial x} :]1, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue comme quotient de fonctions continues.
- De plus, il existe $x \in]1, +\infty[$ tel que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ converge (par la question 2).
- L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, t) dt$ converge normalement sur $]1, +\infty[$ car

$$\forall x > 1, \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} \right| \leq \frac{2}{(x+t)^3} \leq \frac{2}{(1+t)^3}$$

(car $x > 1$, donc $x+t > 1+t > 0$ et donc $(x+t)^3 > (1+t)^3$), où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1+t)^3}$ converge (d'après la question 1).

Finalement, par le théorème de dérivation sous le signe \int (le cas non compact), la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]1, +\infty[$ et on a :

$$\forall x > 1, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} dt = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^3} dt$$

4. Soit $R > 0$. On a l'intégration par parties :

$$\int_0^R \sin t (-2(x+t)^{-3}) dt = [\sin t (x+t)^{-2}]_{t=0}^R - \int_0^R (x+t)^{-2} \cos t dt, \quad (1)$$

ou encore :

$$\int_0^R \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} dt = \left[\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right]_{t=0}^R - \int_0^R \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt.$$

Or, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\sin R}{(x+R)^2} = 0$ (car $\left| \frac{\sin R}{(x+R)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+R)^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$), et les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$ convergent (car $\left| \frac{\cos t}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+t)^2}$ où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t)^2}$ converge). On en déduit que l'identité (1) passe à la limite lorsque $R \rightarrow +\infty$ et que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt.$$

5. Soit $g :]1, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{-\cos t}{(x+t)^2}$. g est continue comme quotient de fonctions continues. Pour tout $t \geq 0$, la fonction $]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x, t)$ est dérivable (c'est une fraction rationnelle) et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{2 \cos t}{(x+t)^3}$. La fonction $\frac{\partial g}{\partial x} :]1, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue comme quotient de fonctions continues. De plus, il existe $x \in]1, +\infty[$ tel que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ converge (voir la question 4). Enfin, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) dt$ converge normalement sur $]1, +\infty[$ car :

$$\forall x > 1, \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{2 \cos t}{(x+t)^3} \right| \leq \frac{2}{(x+t)^3} \leq \frac{2}{(1+t)^3},$$

où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^3} dt$ converge (voir la question 1).

On en déduit, par le théorème de dérivation sous le signe \int , que la fonction $F' :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et que

$$\forall x > 1, F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos t}{(x+t)^3} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3} dt$$

6. Il y avait une erreur dans l'énoncé, l'équation différentielle à montrer était

$$y'' + y - \frac{1}{x^2} = 0$$

Soit $R > 0$. On a l'intégration par parties :

$$\int_0^R \cos t (-2(x+t)^{-3}) dt = [\cos t (x+t)^{-2}]_{t=0}^R - \int_0^R (x+t)^{-2} (-\sin t) dt, \quad (2)$$

ou encore :

$$\int_0^R \frac{-2 \cos t}{(x+t)^3} dt = \left[\frac{\cos t}{(x+t)^2} \right]_{t=0}^R + \int_0^R \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt.$$

Or, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\cos R}{(x+R)^2} = 0$ (car $\left| \frac{\cos R}{(x+R)^2} \right| \leq \frac{1}{(x+R)^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$), et les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt$ convergent (par les questions 2 et 4). On en déduit que l'identité (2) passe à la limite lorsque $R \rightarrow +\infty$ et que

$$\forall x > 1, -F''(x) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3} dt = -\frac{1}{x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2} dt = -\frac{1}{x^2} + F(x),$$

et donc

$$\forall x > 1, F''(x) + F(x) - \frac{1}{x^2} = 0.$$

F est donc solution de l'équation différentielle proposée.

7. Fixons $a > 0$. Comme à la question 3 et 5, on voit que f et $g:]a, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, que les fonctions $]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont dérivables pour tout $t \geq 0$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}:]a, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont continues. De plus, il existe $x > a$ tel que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ et $\int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ convergent (par les questions 2 et 4), et comme

$$\forall x > a, \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{-2 \sin t}{(x+t)^3} \right| \leq \frac{2}{(x+t)^3} \leq \frac{2}{(a+t)^3}$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2}{(a+t)^3},$$

où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a+t)^3}$ converge (par la question 1). Il en résulte que les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, t) dt$ convergent normalement sur $]a, +\infty[$. De tout cela, on en déduit par le théorème de dérivation sous le signe \int (le cas non compact) que les fonctions F et $G:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ et $\int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt = G(x)$$

où la deuxième égalité se montre comme à la question 4. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, F et G sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et on a $F' = G$, ce qui prouve que F est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 :1. (a) Dessin de P (b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y) \in P &\iff 2x^2 - 4x \leq y \leq \frac{x^2}{2} \implies 2x^2 - 4x \leq \frac{x^2}{2} \implies 4x^2 - 8x \leq x^2 \\ &\implies 3x^2 - 8x \leq 0 \implies x(3x - 8) \leq 0 \implies 0 \leq x \leq \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \frac{8}{3}, 2x^2 - 4x \leq y \leq \frac{x^2}{2}\}$. Il en résulte que P est quarrable, car les fonctions $[0, \frac{8}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 4x$ et $\frac{x^2}{2}$ sont continues (elles sont polynomiales) et que :

$$\begin{aligned}\mu(P) &= \iint_P dx dy = \int_0^{8/3} \left(\int_{2x^2-4x}^{x^2/2} dy \right) dx = \int_0^{8/3} \left(\frac{x^2}{2} - (2x^2 - 4x) \right) dx \\ &= \int_0^{8/3} \left(-\frac{3x^2}{2} + 4x \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} + 2x^2 \right]_{x=0}^{8/3} = \left[\frac{x^2}{2} (4 - x) \right]_{x=0}^{8/3} = \frac{8^2}{2 \times 3^2} \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{128}{27}\end{aligned}$$

2. Dessin de T

La droite passant par A et B , celle passant par B et C et celle passant par A et C ont respectivement pour équations : $y = 3x + 2$, $y = -\frac{3}{2}x + 2$ et $y = -1$. On en déduit que

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq 3x + 2, \quad y \leq -\frac{3}{2}x + 2, \quad y \geq -1 \right\}.$$

(a) Si $(x, y) \in T$, alors $3x + y + 6 = (3x + 2) + (y + 4) \geq y + (y + 4) = 2y + 4 \geq -2 + 4 = 2 > 0$.
Donc $3x + y + 6 \neq 0$. On en déduit que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{(3x + y + 6)^2}$ est bien définie sur T .

(b) On peut encore écrire :

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -1 \leq y \leq 2, \quad -\frac{1}{3}(2 - y) \leq x \leq \frac{2}{3}(2 - y) \right\}.$$

(car si $(x, y) \in T$, alors $y \leq 3x + 2$ donc $x \geq \frac{1}{3}(y - 2)$, mais aussi $y \leq -\frac{3}{2}x + 2$ donc $\frac{2}{3}(2 - y) \geq x$ et donc $\frac{2}{3}(2 - y) \geq x \geq \frac{1}{3}(y - 2) \implies \frac{2}{3}(2 - y) \geq \frac{1}{3}(y - 2) \implies 2 \geq y$. La réciproque est immédiate). On en déduit que T est quarrable et que

$$I = \iint_T \frac{dx dy}{(3x + y + 6)^2} = \int_{-1}^2 \left(\int_{-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)} \frac{dx}{(3x + y + 6)^2} \right) dy$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)} \frac{dx}{(3x + y + 6)^2} &= \frac{1}{3} \left[\frac{-1}{3x + y + 6} \right]_{x=-\frac{1}{3}(2-y)}^{\frac{2}{3}(2-y)} \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{10 - y} - \frac{1}{2y + 4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2(y + 2)} + \frac{1}{y - 10} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 3I &= \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2(y + 2)} + \frac{1}{y - 10} \right) dy = \left[\frac{1}{2} \ln(y + 2) + \ln|y - 10| \right]_{-1}^2 \\ &= (\ln 2 + 3 \ln 2) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 + \ln 11 \right) = 4 \ln 2 - \ln 11 = \ln \frac{16}{11} \end{aligned}$$

Ainsi, $I = \frac{1}{3} \ln \frac{16}{11}$.