Test 3, durée 30 min.

Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :
Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b \Big(f(t) \Big)^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

Exercice 2 :
Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)dt$$
$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

Exercice 3 :
On définit une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

- Montrer que F est bien définie et continue.
- Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
- F est-elle dérivable en 0 ?
- F admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?