

Test 3, durée 30 min.

Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :

Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans \mathbb{R} , on a

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b (f(t))^2 dt$$

Pour quelles fonctions a-t-on l'égalité ?

Exercice 2 :

Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$$

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)dt$$

$$\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

Exercice 3 :

On définit une fonction F sur \mathbb{R}_+ par

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

- Montrer que F est bien définie et continue.
- Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
- F est-elle dérivable en 0 ?
- F admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?