

### Correction partielle du Test 2 bis

Étudier selon le paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature (intégrable ou non) de l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

On note  $f: t \mapsto \frac{\sin t}{t^\alpha}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .  
Au voisinage de 0 on a l'équivalence :

$$f(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$$

Donc  $f$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $\alpha - 1 < 1$  c'est-à-dire  $\alpha < 2$ .  
De plus, comme  $f$  est positive au voisinage de 0,

$$\int_\varepsilon^1 f(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$$

dès que  $\alpha \geq 2$ .

Au voisinage de  $+\infty$ , on a la majoration :

$$|f(t)| \leq \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

Donc  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  si  $\alpha > 1$ .

Supposons maintenant  $\alpha \leq 1$ , et montrons qu'alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$  :  
Pour  $k \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| dt &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t^\alpha} dt \\ &\geq \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt \\ &= \frac{2}{((k+1)\pi)^\alpha} = \frac{C}{(k+1)^\alpha}. \end{aligned}$$

Par critère de Riemann sur les séries, la suite  $\left(\frac{C}{(k+1)^\alpha}\right)_{k \geq 1}$  n'est pas sommable car  $\alpha \leq 1$ .

Donc

$$\int_1^{N\pi} |f(t)| dt \geq C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc  $f$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$  pour  $\alpha \leq 1$ .

Donc  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $\alpha \in ]1, 2[$ .

Note : par contre  $\int_0^A f(t) dt$  converge quand même vers une limite finie quand  $A \rightarrow +\infty$  si  $\alpha \in ]0, 1]$ , grâce critère de Leibniz sur les séries. (c'est-à-dire que l'intégrale impropre converge quand même bien que  $f$  ne soit pas intégrable).