Around the Plancherel measure on integer partitions

Séance d'exercices

Jérémie Bouttier

Aléa, 21 mars 2019

Dans la section 1, on verra une preuve de la formule des équerres par les opérateurs fermioniques. La section 2, plus probabiliste, explique comment on obtient le théorème de Baik-Deift-Johansson à partir de sa version poissonisée vue en cours. Enfin, dans la (longue) section 3, on démontre des résultats classiques de la théorie des processus déterminantaux, en se restreignant au cas fini ou dénombrable. On évoque à la fin un lien (non discuté dans les notes de cours) avec le lemme de Lindström-Gessel-Viennot. Ce lien a été abondamment employé dans les travaux de Johansson.

1 Fermions et formule des équerres

On utilisera les notations vues en cours, cf les transparents et notes sur `http://nsup.org/~bouttier/alea2019/`.

1.1 Échauffement : relations de commutation

1. Vérifier la relation de commutation
$$[\psi_k^*, \alpha] = \psi_{k-1}^* \tag{1.1}$$
2. Expliquer pourquoi elle implique
$$e^{-x\alpha}\psi_k^* e^{x\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\psi_{k-n}^*. \tag{1.2}$$

1.2 Lemme de Wick

On aura besoin du lemme de Wick sous une forme légèrement différente [1] de celle vue en cours.

1. Dans le cours on alternait opérateurs de création et d'annihilation. Ici les annihilations sont à gauche des créations, il n'y a pas la question du "time-ordering".

Lemme 1.1. *Soient $\varphi_1^*, \dots, \varphi_\ell^*$ des combinaisons linéaires des opérateurs d'annihilation ψ_k^*, et $\chi_1, \dots, \chi_\ell$ des combinaisons linéaires des opérateurs de création ψ_k, $k \in \mathbb{Z}'$. Alors on a*

$$v_\emptyset^* \varphi_\ell^* \cdots \varphi_1^* \chi_1 \cdots \chi_\ell v_\emptyset = \det_{1 \le i,j \le \ell} v_\emptyset^* \varphi_i^* \chi_j v_\emptyset. \tag{1.3}$$

1. Vérifier le cas $\ell = 2$.

   Indication : par multilinarité on peut supposer $\varphi_i^* = \psi_{k_i}^*$ et $\chi_i = \psi_{k_i'}$ pour $k_i, k_i' \in \mathbb{Z}'$, $i = 1, 2$. Pourquoi le lemme est-il trivial si k_1 ou k_2 est négatif ? Utiliser les CAR pour traiter l'autre cas.
2. Facultatif : démontrer le cas général par récurrence sur ℓ.

1.3 Formule des équerres

On va se servir de tout ça pour donner une expression du nombre d_λ de tableaux de Young standard de forme λ.

1. Expliquer pourquoi, si λ a une longueur inférieure ou égale à ℓ (i.e. $\lambda_i = 0$ pour $i > \ell$) alors

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} x^{|\lambda|} = v_\emptyset^* \psi^*_{\lambda_\ell + \frac{1}{2}} \psi^*_{\lambda_{\ell-1} + \frac{3}{2}} \cdots \psi^*_{\lambda_1 + \ell - \frac{1}{2}} e^{x\alpha} \psi_{\ell - \frac{1}{2}} \cdots \psi_{\frac{3}{2}} \psi_{\frac{1}{2}} v_\emptyset. \tag{1.4}$$

   Indication : noter que $\psi_{\ell-\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\frac{1}{2}} v_\emptyset = v_{\mathbb{Z}'_{<\ell}}$, ce qui correspond au vide translaté de ℓ, et que l'action de α commute aux translations.
2. Éliminer le facteur $e^{x\alpha}$ selon la méthode vue en cours.
3. Utiliser le lemme de Wick dans la version ci-dessus pour exprimer $\frac{d_\lambda}{|\lambda|!}$ comme un déterminant.
4. Évaluer le déterminant pour obtenir

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} = \frac{\prod_{1 \le i,j \le \ell} (\lambda_i - i - \lambda_j + j)}{\prod_{1 \le i \le \ell} (\lambda_i - i + \ell)!}. \tag{1.5}$$

   Indication : en extrayant des facteurs dépendant uniquement des lignes ou colonnes, se ramener à un déterminant de la forme $\det_{1 \le i,j \le n} p_{j-1}(\lambda_i - i)$ où $p_j(x)$ est un polynôme en x de degré j, qui est égal au déterminant de Vandermonde.
5. Réarranger le résultat pour obtenir la formule des équerres sous la forme classique

$$\frac{d_\lambda}{|\lambda|!} = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{1}{\lambda_i - i + \lambda_j' - j + 1} \tag{1.6}$$

   où λ' est la partition conjuguée ($\lambda_j' = \#\{i : \lambda_i \le j\}$) et le produit porte sur toutes les “cases” du diagramme de Young de λ. Le dénominateur $\lambda_i - i + \lambda_j' - j + 1$ s'interprète graphiquement comme la longueur de l'équerre de la case (i, j).

2 Asymptotique et dépoissonisation

On rappelle que $\lambda^{(n)}$ et $\lambda^{\langle\theta\rangle}$ sont des partitions aléatoires tirées selon respectivement la mesure de Plancherel de taille n et la mesure de Plancherel poissonisée de paramètre θ. On a vu en cours que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_1^{\langle\theta\rangle} - 2\sqrt{\theta}}{\theta^{1/6}} \leq y\right) \to F_2(y) \tag{2.1}$$

où F_2 est la distribution de Tracy-Widom. Le but de l'exercice est de montrer que le résultat reste vrai en remplaçant θ par n et $\lambda^{\langle\theta\rangle}$ par $\lambda^{(n)}$, par une approche due à Johansson. On note N_θ une variable aléatoire de Poisson de paramètre θ.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(|N_\theta - \theta| > 3\sqrt{\theta \ln \theta}\right) \leq \frac{1}{9 \ln \theta}. \tag{2.2}$$
Indication : Bienaymé-Tchebychev.
2. On se donne une fonction $P : \mathbb{N} \to [0,1]$ décroissante et on pose $\theta_n^{\pm} = n \pm 4\sqrt{n \ln n}$. Montrer que
$$E\left(P(N_{\theta_n^+})\right) - \frac{1}{9 \ln n} \leq P(n) \leq \mathbb{E}\left(P(N_{\theta_n^-})\right) + \frac{1}{9 \ln n}. \tag{2.3}$$
Indication : distinguer les cas où $N_{\theta_n^\pm}$ est plus petit ou plus grand que n.
3. Pour un t fixé, expliquer (informellement) pourquoi la fonction
$$P_t(n) = \mathbb{P}(\lambda_1^{(n)} \leq t) \tag{2.4}$$
est une fonction décroissante de n. (Facultatif : donner un argument rigoureux.)
4. En déduire que, pour tout t,
$$Q_t(\theta_n^+) - \frac{1}{9 \ln n} \leq P_t(n) \leq Q_t(\theta_n^-) + \frac{1}{9 \ln n} \tag{2.5}$$
où
$$Q_t(\theta) := \mathbb{P}(\lambda_1^{\langle\theta\rangle} \leq t) = \mathbb{E}\left(P_t(N_\theta)\right). \tag{2.6}$$
5. En utilisant (2.1) et le fait que F_2 est continue croissante, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} Q_{2n+yn^{1/3}}(\theta_n^\pm) = F_2(y)$$
et en déduire le théorème de Baik-Deift-Johansson
$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda^{(n)} - 2\sqrt{n}}{n^{1/6}} \leq y\right) \to F_2(y). \tag{2.7}$$
6. Question pour les experts en dépoissonisation (je ne connais pas la réponse) : peut-on appliquer la même approche pour dépoissoniser le théorème 1 vu en cours sur la limite "bulk" ? Ou faut-il utiliser l'approche "classique" par méthode du col, en utilisant des bornes/estimations lorsque θ est complexe ?

3 Processus déterminantaux

Cette partie propose, sous forme d'exercices, de "bâtir" une théorie naïve (dans le cas fini/dénombrable) des processus déterminantaux. Cela reprend essentiellement les résultats donnés dans les sections 2.3 et 2.4 de mes notes.

Soit Λ un ensemble qu'on supposera fini, ou infini dénombrable si on est courageux. On rappelle qu'un processus déterminantal sur Λ est un sous-ensemble aléatoire $X \subset \Lambda$ tel que, pour tout ensemble fini $U \subset X$ fixé, on a

$$\mathbb{P}(U \subset X) = \det_{1 \leq i,j \leq n} K(u_i, u_j) \tag{3.1}$$

où $K : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ est appelé noyau de corrélation, qu'on voit comme une matrice dont les lignes et colonnes sont indicées par Λ, et $u_1, \ldots, u_n$ sont les éléments de U écrits dans un ordre arbitraire (ce qui n'affecte pas le déterminant).

3.1 Généralisation de la formule des *gap probabilities*

Pour $B \subset \Lambda$, on a vu que

$$\mathbb{P}(X \cap B = \emptyset) = \det(I - K_B) \tag{3.2}$$

où I est la matrice-identité et K_B la matrice obtenue à partir de K en ne gardant [2] que les lignes et colonnes dans B. Montrer que, plus généralement, on a pour tout z

$$\mathbb{E}(z^{\#(X \cap B)}) = \det(I + (z-1)K_B). \tag{3.3}$$

En déduire que, si K_B a pour valeurs propres $\kappa_1, \ldots, \kappa_{|B|}$ (comptées selon leur multiplicité dans le polynôme caractéristique) alors $\#(X \cap B)$ a la même loi que la somme de $|B|$ variables de Bernoulli indépendantes $N_1, \ldots, N_{|B|}$ où $\mathbb{E}(N_i) = \kappa_i$. Noter que, en particulier, $\#(X \cap B)$ est presque sûrement constant si et seulement si les κ_i valent tous 0 ou 1, autrement dit si K_B est un (moralement) un projecteur.

Encore plus généralement, montrer que pour toute fonction $\phi : \Lambda \to \mathbb{C}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{x \in X} (1 + \phi(x))\right) = \det(I + K\phi) \tag{3.4}$$

où on voit ϕ comme la matrice diagonale dont le coefficient (x, x) est $\phi(x)$. (Comment cette formule générale implique-t-elle les précédentes ?)

Remarque 3.1. Le membre de gauche de (3.4) correspond essentiellement à la "fonctionnelle de Laplace" de X.

---

2. Par un léger abus on confond deux points de vue : K_B peut être vu comme une matrice dont les indices sont soit dans B, soit dans Λ : dans ce dernier cas $K_B(u, v)$ vaut $K(u, v)$ si u et v sont tous deux dans B, et vaut 0 sinon. Le choix du point de vue n'affecte pas la valeur du déterminant (3.2).

3.2 L-ensembles

Une construction générale de processus déterminantaux est la suivante : soit X un sous-ensemble aléatoire de Λ tel qu'il existe une matrice $L : \Lambda \times \Lambda$, appelée *noyau de configuration*, telle que pour tout $A \subset \Lambda$ on a

$$\mathbb{P}(X = A) = \frac{1}{Z} \det L_A \tag{3.5}$$

où Z est un facteur de normalisation, et où on voit ici L_A comme une matrice à indices dans A.

1. Montrer que le facteur de normalisation est donné par

$$Z = \det(I + L) \tag{3.6}$$

   et en déduire que $I + L$ et nécessairement inversible.
2. On pose $K = L(I+L)^{-1}$. Montrer que la formule (3.4) est vraie. En déduire que X est un processus déterminantal de noyau K. Indication : on peut voir le membre de gauche de (3.4) comme une série génératrice des fonctions de corrélation $\mathbb{P}(U \subset X)$.
3. Existe-t-il un noyau de configuration L, tel que défini ci-dessus, pour tout processus déterminantal ? Si non, donner un contre-exemple.

Remarque 3.2. La construction ci-dessus, dite des *L-ensembles*, est importante en théorie des matrices aléatoires (dans sa généralisation continue à $\Lambda = \mathbb{R}$) et notamment en lien avec la méthode dite des polynômes orthogonaux. C'est une méthode alternative aux fermions pour montrer qu'un processus est déterminantal. On donne en section 3.5 une application combinatoire utilisant le célèbre lemme LGV.

3.3 Principe de complémentation ou "dualité particule-trou"

Soit X un processus déterminantal sur Λ de noyau K.

— Montrer que le complémentaire $\Lambda \setminus X$ est également un processus déterminantal, en exhibant un noyau de corrélation.

— Plus généralement, montrer que pour tout ensemble $D \subset \Lambda$, la différence symétrique $X \Delta D = (X \setminus D) \cup (D \setminus X)$ est un processus déterminantal (en exhibant à nouveau un noyau de corrélation).

3.4 Bornes de Hadamard et déterminants de Fredholm

Ici Λ est supposé infini dénombrable.

Proposition 3.3 (Bornes de Hadamard)**.** *Soit M une matrice de taille $n \times n$ finie.*

— *si M est hermitienne positive*[3] *alors*

$$0 \leq \det M \leq \prod_{i=1}^{n} M(i,i) \tag{3.7}$$

3. On a $M(j,i) = \overline{M(i,j)}$ et $\sum_{i,j} \overline{v(i)} M(i,j) v(j) \geq 0$ pour tout vecteur $v(\cdot)$.

— *dans le cas général, on a*

$$|\det M| \leq n^{n/2} \max_{1 \leq i,j \leq n} M(i,j). \tag{3.8}$$

On pourra bien sûr essayer de démontrer cette proposition élémentaire, mais l'objectif est de s'en servir pour montrer la convergence du déterminant de Fredholm

$$\det(I + xK)_\Lambda := \sum_{\substack{U \subset \Lambda \\ U \text{ fini}}} x^{\#|U|} \det K_U \tag{3.9}$$

sous de bonne hypothèses sur $K : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$.

1. On suppose que K est hermitien positif (au sens où K_U l'est pour tout U fini) et que la trace
$$\operatorname{Tr} K := \sum_{i \in \Lambda} K(i,i) \tag{3.10}$$
est finie. Montrer que la somme (3.9) est absolument convergente pour tout x, et est donc une fonction entière.
2. On suppose $\Lambda = \mathbb{N}$ (quitte à choisir un ordre). On dit que K (qui n'est pas supposé hermitien positive) est de *décroissance exponentielle* s'il existe des constantes $C, c > 0$ telles que
$$|K(i,j)| \leq Ce^{-c(i+j)}. \tag{3.11}$$
Montrer que la somme (3.9) est absolument convergente pour tout x, et est donc une fonction entière.
3. Soit X un processus déterminantal de noyau K vérifiant l'une ou l'autre des hypothèses ci-dessus. Montrer que X est presque sûrement fini. Vérifier que les résultats des sections 3.1 et 3.2 restent valides — on supposera ϕ bornée dans (3.4).
4. Montrer que, si K et K' sont de décroissance exponentielle alors
$$\det(I + K)_\Lambda \det(I + K')_\Lambda = \det(I + K + K' + KK')_\Lambda. \tag{3.12}$$

Remarque 3.4. Si K et K' sont hermitiens, le produit KK' ne l'est pas nécessairement donc la formule (3.12) n'a pas directement de sens. On peut en fait montrer que le déterminant de Fredholm a un sens pour des noyaux “trace-class” mais cela nécessite des notions d'analyse fonctionnelle plus poussées.

3.5 L-ensembles et lemme LGV

Dans cet exercice on décrit la recette combinatoire favorite de Johansson, qu'il appliqua dans ses travaux sur les pavages dans les années 2000.

Commençons par quelques définitions et notations. Soit G un graphe dirigé acyclique pondéré, i.e. à chaque arête e est associé un poids w_e. Si E est un ensemble d'arêtes alors on pose

$$W(E) := \prod_{e \in E} w_e. \tag{3.13}$$

Pour deux sommets u et v on pose

$$P(u,v) = \sum_{\pi : u \to v} W(\pi) \tag{3.14}$$

où la somme porte sur tous les chemins π de u à v (en particulier $P(u,v) = 0$ s'il n'existe aucun tel chemin).

Soient $s_1, \ldots, s_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ deux familles de sommets appelés respectivement *sources* et *puits*. On suppose que les sources et puits sont *bien placés* au sens où, pour $i < j$, tout chemin reliant s_i à p_j croise (au sens de passer par un sommet commun) nécessairement tout chemin reliant s_j à p_i. Soit $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ une famille de chemins telle que π_i relie s_i à p_i pour tout i. La famille est dite *non intersectante* si, pour tous i, j, π_i et π_j ne se croisent pas. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des telles familles.

Lemme 3.5 (Lindström-Gessel-Viennot)**.** *Pour des sources et puits bien placés, on a*

$$\sum_{\Pi \in \mathcal{N}} W(\Pi) = \det_{1 \le i,j \le n} P(s_i, p_j). \tag{3.15}$$

On note Z la quantité donnée par (3.15), cela permet de munir $\mathcal{N}$ de la mesure de probabilité

$$\mathrm{Prob}(\Pi) = \frac{W(\Pi)}{Z} \tag{3.16}$$

(en supposant les poids positifs). On s'intéresse maintenant à la distribution des points selon une “section”. On dit qu'un ensemble de sommets S forme une *section* si tout chemin reliant une source s_i à un puits p_j passe par un unique sommet de S.

Exemple 3.6. Si tout sommet v de G est muni d'une “abscisse” $x(v) \in \mathbb{Z}$ telle que, pour toute arête $e = (u,v)$, on a $x(v) = x(u) + 1$, et si toutes les sources ont abscisse 0 et tous les puits ont abscisse N (mettons), alors pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, l'ensemble des sommets d'abscisse i forme une section.

Pour $\Pi \in \mathcal{N}$ on note $\Pi|_S$ l'ensemble des sommets de S par lesquels passe un chemin de Π. Le but de l'exercice est de montrer que $\Pi|_S$ est un processus déterminantal.

1. Soit $A \subset S$. Montrer que, si A a n éléments $a_1, \ldots, a_n$ alors

   $$\mathbb{P}(\Pi|_S = A) = \frac{1}{Z} \det_{1 \le i,j \le n} P(s_i, a_j) \det_{1 \le i,j \le n} P(a_i, p_j) \tag{3.17}$$

   tandis que $\mathbb{P}(\Pi|_S = A) = 0$ sinon.
2. En déduire que $\Pi|_S$ est un L-ensemble au sens de la section 3.2. Conclure que $\Pi|_S$ est un processus déterminantal.
3. Application possible (pour les amateurs de déterminants) : on considère l'ensemble des pavages par losanges d'un hexagone $a \times b \times c$ (où on suppose que le côté a est orienté dans la direction “verticale”). En utilisant la bijection classique entre pavages et chemins non intersectants, montrer que l'ensemble des losanges “horizontaux” le long d'une ligne verticale fixée forme un processus déterminantal, et calculer le noyau de corrélation.

Remarque 3.7. Si on a plusieurs sections successives $S_1, \ldots, S_m$ (cf l'exemple ci-dessus) alors on peut montrer que $\Pi|_{S_1} \cup \cdots \Pi|_{S_m}$ est encore un processus déterminantal. Cela se fait en adaptant (3.17) pour exprimer la probabilité $\mathbb{P}(\Pi|_{S_1} = A_1, \ldots, \Pi|_{S_m} = A_m)$ et en appliquant le théorème dit de Eynard-Mehta, qui est une généralisation de la construction des L-ensembles. (Ce théorème fut historiquement introduit dans le contexte des matrices aléatoires, pour le modèle dit "en chaîne".)