Schémas réduits, irréductibles, connexes: extension du corps de base

On se propose ici de regrouper le comportement des propriétés de réduction, d'irréductibilité et de connexité des variétés algébriques par extension du corps de base. À noter qu'un intérêt particulier est porté au cas des groupes algébriques. Il s'agit essentiellement d'un condensé de résultats issus de [Gro65] et de remarques dues à O. Gabber dans [GP11].

Table des Matières

1 Schémas géométriquement réduits

[Gro65, §4.5] et [Bou50, Chapitre V, §15]

1.1 Algèbres séparables

Soit k un corps.

Définition 1.1. Une k-algèbre A est dite séparable lorsque pour toute extension K de k, $A \otimes_k K$ est un anneau réduit.

Le fait suivant se trouve dans tout corps de théorie de Galois:

Fait 1.2. Une extension algébrique de k est séparable (au sens usuel) si et seulement si c'est une k-algèbre séparable.

Fait 1.3. Les extensions purement transcendantes de k sont séparables.

Démonstration. Soit E un ensemble d'indéterminées et K une extension de k. Alors $k(E) \otimes_k K$ est isomorphe au localisé de $K[E]$ par $k[E] - \{0\}$, lequel est réduit. $\square$

Proposition 1.4. Si A est une k-algèbre séparable et B une k-algèbre réduite, alors $A \otimes_k B$ est réduit.

Démonstration. La k-algèbre B étant réduite, on dispose d'une injection $B \hookrightarrow \prod_i \kappa_i$ où les κ_i sont les corps résiduels des points génériques de B. Puisque $A \otimes_k \prod_i \kappa_i$ s'injecte dans $\prod_i A \otimes_k \kappa_i$, il suit que $A \otimes_k B$ s'injecte dans $\prod_i A \otimes_k \kappa_i$, lequel est réduit comme produit d'algèbres réduites, ce qui conclut. $\square$

Corollaire 1.5. Si A et B sont des k-algèbres séparables, alors $A \otimes_k B$ est une k-algèbre séparable.

Donnons une première caractérisation de la séparabilité lorsque la caractéristique de k est nulle:

Théorème 1.6. Si k est de caractéristique nulle, une k-algèbre A est séparable si et seulement si elle est réduite.

Démonstration. Supposons que k est de caractéristique nulle et que A est réduite. Soit K une extension de k, E une base de transcendance de K sur k. Alors

$$A \otimes_k K = (A \otimes_k k(E)) \otimes_{k(E)} K$$

où $A \otimes_k k(E)$ est réduite, en vertu de (1.3) et de (1.4), et où l'extension K de $k(E)$ est algébrique séparable (car $k(E)$ et de caractéristique nulle), donc séparable par (1.2). Il suffit alors d'appliquer (1.4) où $k(E)$ joue le rôle de A et $A \otimes_k k(E)$ celui de B. $\square$

Lorsque la caractéristique de k est non nulle, on dispose de la caractérisation suivante:

Théorème 1.7. Supposons k de caractéristique $p > 0$, soit A une k-algèbre et k^{par} la clôture parfaite de k. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) La k-algèbre A est séparable.

(ii) L'anneau $A \otimes_k k^{\mathrm{par}}$ est réduit.

(iii) Pour toute extension radicielle finie K de k, $A \otimes_k K$ est un anneau réduit.

(iv) L'anneau A est réduit et pour toute famille k-libre (a_i) de A, la famille (a_i^p) est k-libre.

(v) L'anneau A est réduit et pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, $\kappa(\mathfrak{p})$ est une extension séparable de k.

Démonstration. D'emblée, les implications (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) sont évidentes. Montrons que (iii) implique (iv): soit (a_i) une famille k-libre de A et $\lambda_i \in k$ vérifiant une dépendance linéaire $\sum_i \lambda_i a_i^p = 0$. Soit k' une extension radicielle finie de k contenant des μ_i vérfiant $\mu_i^p = \lambda_i$, si bien que dans $A \otimes_k k'$ on a $0 = \sum_i \lambda_i a_i^p = \sum_i (\mu_i a_i)^p = (\sum \mu_i a_i)^p$. Puisque $A \otimes_k k'$ est réduit, il suit que $\sum \mu_i a_i = 0$, donc que $\mu_i = 0$ et *a fortiori* que $\lambda_i = 0$, ce qui conclut.

Pour montrer que (iv) implique (i), soit K une extension de k et $x \in A \otimes_k K$ vérifiant $x^p = 0$. Écrivons $x = \sum_i a_i \otimes \lambda_i$, où $\lambda_i \in K$, et les $a_i \in A$ sont pris k-libres. Alors, $0 = x^p = \sum_i a_i^p \otimes \lambda_i^p$: la famille (a_i^p) étant k-libre, il suit donc que $\lambda_i^p = 0$ et donc que $\lambda_i = 0$, ce qui conclut.

La démonstration de (v)$\Rightarrow$(i) est analogue à celle de (1.4). Pour montrer que (i) implique (v), choisissons K une extension de k et $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de A. Puisque $A \otimes_k K$ est réduit, il vient (par localisation) que $A_{\mathfrak{p}} \otimes_k K$ est également réduit. Par minimalité de $\mathfrak{p}$, le nilradical de $A_{\mathfrak{p}} \otimes_k K$ contient $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \otimes_k K$, lequel idéal est donc nul: en particulier, le quotient par cet idéal, qui n'est autre que $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_k K$, est encore réduit, ce qui conclut. $\square$

Pour la commodité des références, on obtient, en combinant (1.6) et (1.7), le corollaire suivant:

Corollaire 1.8. Soit A une k-algèbre. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) La k-algèbre A est séparable.

(ii) L'anneau $A \otimes_k k^{\mathrm{perf}}$ est réduit.

(iii) Pour toute extension radicielle finie K de k, $A \otimes_k K$ est réduit.

(iv) L'anneau A est réduit et pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, $\kappa(\mathfrak{p})$ est une extension séparable de k.

Le critère suivant, dû à MacLane, caractériser la séparabilité pour les extensions de corps:

Théorème 1.9. Soit p la caractéristique de k, Ω une extension parfaite de k et L une sous-extension de Ω. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) L est séparable sur k.

(ii) L est linéairement disjointe de k^{perf} sur k.

(iii) L est linéairement disjointe sur k de toute extension radicielle de k contenue dans Ω.

Démonstration. On peut d'emblée supposer que $p > 0$, le cas $p = 0$ rendant les équivalences évidentes. Pour montrer (i)⇒(ii), choisissons une famille k-libre (x_i) de L, ainsi que $\lambda_i \in k^{\mathrm{perf}}$ tels que $\sum_i \lambda_i x_i = 0$. Choisissons $\mu_i \in k$ et $e \geq 0$ tels que $\lambda_i^{p^e} = \mu_i$. Il vient alors que $\sum_i \mu_i x_i^{p^e} = (\sum_i \lambda_i x_i)^{p^e} = 0$, tandis que la famille $(x_i^{p^e})$ est k-libre par le point (iv) de (1.7). Il suit que $\mu_i = 0$ et donc $\lambda_i = 0$, ce qui conclut.

L'implication (ii)⇒(iii) est évidente. Pour montrer que (iii) implique (i), il suffit de prendre une extension radicielle K de k et de remarquer que puisque L et K sont linéairement disjoints, $L \otimes_k K$ est un corps, ce qui conclut. □

Corollaire 1.10. Soit k^{par} une clôture parfaite de k et L une extension séparable de k. Alors, $L \otimes_k k^{\mathrm{par}}$ est un corps. Si L est en outre supposé algébrique sur k, alors $L \otimes_k k^{\mathrm{par}}$ est une clôture parfaite de L.

Démonstration. La première assertion suit du point (ii) de (1.9). Pour la deuxième assertion, $L \otimes_k k^{\mathrm{par}}$ est d'une part radiciel sur L (car k^{par} l'est sur k), d'autre part parfait comme extension algébrique de k^{par}: il suit donc que c'est une clôture parfaite de L, ce qui conclut. □

1.2 Schémas géométriquement réduits

Définition 1.11. Un k-schéma est dit géométriquement réduit lorsque pour toute extension K de k, le schéma $X \otimes_k K$ est réduit.

On déduit de (1.8), combiné à (1.4), le théorème suivant:

Théorème 1.12. Si X est un k-schéma, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Pour tout k-schéma réduit S, le schéma $X \times_k S$ est réduit.

(ii) X est un k-schéma géométriquement réduit.

(iii) $X \otimes_k k^{\mathrm{per}}$ est un schéma réduit.

(iv) Pour toute extension radicielle finie K de k, le schéma $X \otimes_k K$ est réduit.

(v) Pour tout point générique x de X, $\kappa(x)$ est une extension séparable de k.

Proposition 1.13. Si X est un k-schéma de type fini, il existe une extension radicielle finie k' de k telle que $(X_{k'})_{\mathrm{réd}}$ est un k'-schéma géométriquement réduit.

Démonstration. On peut facilement se ramener au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Considérons une clôture algébrique Ω de k et notons $\mathfrak{N}$ le nilradical de $A \otimes_k \Omega$. Puisque A est un anneau noethérien, $\mathfrak{N}$ est finiment engendré par $y_i = \sum_j a_{ij} \otimes \xi_{ij}$, où $a_{ij} \in A$ et $\xi_{ij} \in \Omega$: notons K l'extension finie de k engendrée par les ξ_{ij} et $\mathfrak{N}'$ l'idéal de $A \otimes_k K$ engendré par les y_i, si bien que $\mathfrak{N}' \otimes_k \Omega = \mathfrak{N}$, et donc $\mathfrak{N} \cap (A \otimes_k K) = \mathfrak{N}'$, d'où il suit que $\mathfrak{N}'$ est le nilradical de $A \otimes_k K$. De plus

$$(A \otimes_k K)_{\mathrm{réd}} \otimes_k \Omega = ((A \otimes_k K)/\mathfrak{N}') \otimes_k \Omega = (A \otimes_k \Omega)/\mathfrak{N}$$

est réduit, ce qui signifie que $(X_K)_{\mathrm{réd}}$ est géométriquement réduit. Quitte à étendre les scalaires, on peut également supposer que K est une extension normale de k, si bien que K est une extension séparable d'une extension radicielle E de k. Puisque $(X_E)_{\text{réd}} \otimes_E K$ est réduit (car l'extension K de E est séparable), il vient que

$$(X_E)_{\text{réd}} \otimes_E K = (X_K)_{\text{réd}}$$

si bien que $(X_E)_{\text{réd}} \otimes_E K$ est géométriquement réduit. On en déduit que $(X_E)_{\text{réd}}$ est géométriquement réduit, ce qui conclut. $\square$

2 Irréductibilité et connexité: situation générale

[Gro65, §4.4]

Soit k un corps, X un k-schéma non vide et K une extension de k. Commençons par remarquer:

Fait 2.1. Le morphisme de projection $p : X \otimes_k K \to X$ est fidèlement plat, quasi-compact et universellement ouvert.

Démonstration. Ces propriétés se déduisent, par changement de base, des mêmes propriétés pour $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ (pour le caractère universellement ouvert de ce morphisme, voir [Gro65, (2.2.13)]). $\square$

Rappelons les propriétés utiles suivantes des morphismes plats:

Proposition 2.2. Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de schémas. Alors:

(i) Si Z est un fermé irréductible de S, alors toute composante irréductible de $f^{-1}(Z)$ domine Z.

(ii) Soient $Z \subseteq Z'$ des fermés irréductibles de S et W une composante irréductible de $f^{-1}(Z)$, alors il existe une composante irréductible W' de $f^{-1}(Z')$ contenant W.

(iii) Si W est une composante irréductible de T, alors $\overline{f(W)}$ est une composante irréductible de S.

(iv) Si S est irréductible de point générique s et si $f^{-1}(s)$ est irréductible, alors T est irréductible.

Démonstration. [Gro65, (2.3.4)(iii) et (2.3.5)] $\square$

Il suit du point (iii) de (2.2) que si $f : T \to S$ est un morphisme de schéma plat, alors on dispose d'une application de l'ensemble des composantes irréductibles (resp. connexes) de T sur l'ensemble des composantes irréductibles de S définie par $Z \mapsto \overline{f(Z)}$ (resp. $Z \mapsto f(Z)$).

Fait 2.3. Les applications ainsi définies sont surjectives.

Démonstration. Pour les composantes connexes, ceci découle directement de la surjectivité de p.

Pour les composantes irréductibles, considérons W une composante irréductible de X. Par surjectivité de p, choisissons Z une composante irréductible de $p^{-1}(W)$ et montrons que Z est une composante irréductible de $X \otimes_k K$. En effet, si $Z \subseteq Z'$ est une composante irréductible de $X \otimes_k K$ contenant Z, alors le point (iii) de (2.2) assure que $\overline{p(Z')}$ est une composante irréductible de X: puisque Z domine W, il s'ensuit que $W = \overline{p(Z')}$ et donc que $Z' \subseteq p^{-1}(W)$. Ainsi $Z = Z'$ est une composante irréductible de $X \otimes_k K$. $\square$

Fait 2.4. Soit K une extension de k. Pour que la projection $p : X \otimes_k K \to X$ induise une bijection entre les composantes irréductibles (resp. connexes) de la source et du but, il faut et il suffit que pour chaque composante irréductible (resp. connexe) Z de X, $Z \otimes_k K$ soit irréductible.

Démonstration. En remarquant que $p^{-1}(Z) = Z \otimes_k K$, il vient que la condition est nécessaire et suffisante. □

Pour continuer à prospecter, énonçons le lemme suivant:

Lemme 2.5. Soit $f : Y \to X$ une application continue d'espaces topologiques vérifiant:

(i) f est ouverte et surjective;

(ii) pour tout $x \in X$, l'espace $f^{-1}(x)$ est irréductible (resp. connexe).

Alors, pour que Y soit irréductible (resp. connexe), il faut et il suffit que X le soit.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire, par surjectivité de f.

Pour montrer qu'elle est également suffisante, commençons par supposer que X est irréductible. Écrivons $Y = Y_1 \cup Y_2$ où Y_1 et Y_2 sont fermés. Posons $X_i = \left\{x \in X : f^{-1}(x) \subseteq Y_i\right\}$, si bien que par l'hypothèse (ii) on a $X = X_1 \cup X_2$. De plus, les X_i sont fermés: en effet, si $x \notin X_1$, il existe $y \in f^{-1}(x)$ tel que $y \notin Y_1$; puisque Y_1 est fermé, on a un ouvert V de $Y - Y_1$ tel que $y \in V$, si bien que $f(V)$ est un ouvert de X en vertu de l'hypothèse (i), et on vérifie aisément que $x \in f(V) \subseteq X - X_1$, ce qui conclut. Le cas connexe se traite de façon identique. □

Corollaire 2.6. Si de plus la restriction de f aux images réciproques des composantes irréductibles de X sont supposées ouvertes, alors f induit une bijection entre les composantes irréductibles (resp. connexes) de X et de Y.

Démonstration. Soit Z une composante irréductible de X. La restriction de f à $f^{-1}(Z)$ vérifie les hypothèses de (2.5) si bien que $f^{-1}(Z)$ est irréductible. De plus, puisque Z est une composante irréductible de X, il suit que $f^{-1}(Z)$ est une composante irréductible de Y.

Soit T une composante irréductible de Y. Alors, $f(T)$ est irréductible et considérons Z une composante irréductible de X contenant $f(T)$: on a $f^{-1}(Z)$ qui est irréductible en vertu du paragraphe précédent, d'où il suit que $T = f^{-1}(Z)$ et donc que $Z = f(T)$, par surjectivité de f.

Le cas connexe se traite de façon identique. □

Énonçons le fait algébrique suivant:

Proposition 2.7. Si L est une extension primaire de k, alors $\mathrm{Spec}(L \otimes_k K)$ est irréductible; si ξ est son point générique alors $\kappa(\xi)$ est une extension primaire de K. Réciproquement, si pour toute extension finie séparable K de k, $\mathrm{Spec}(L \otimes_k K)$ est irréductible, alors L est une extension primaire de k.

Démonstration. [Bou50, Chapitre V, §17.2, Proposition 1] □

Dès lors, on obtient un premier résultat quand le corps de base est algébriquement clos:

Théorème 2.8. Si k est algébriquement clos, la projection $X \otimes_k K \to X$ induit une bijection entre les composantes irréductibles (resp. connexes) de $X \otimes_k K$ et de X.

Démonstration. Appliquons le corollaire (2.6). On sait d'emblée que le morphisme $p : X \otimes_k K \to X$ est universellement ouvert et surjectif. De plus, si $x \in X$ on a $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_k K)$ qui est irréductible (en particulier connexe) en vertu de (2.7), ce qui conclut. □

3 Irréductibilité géométrique

[Gro65, §4.5]

Soit k un corps et X un k-schéma.

Définition 3.1. Le k-schéma X est dit géométriquement irréductible lorsque pour toute extension K de k, le schéma $X \otimes_k K$ est irréductible.

Fait 3.2. Pour que le k-schéma X soit géométriquement irréductible, il faut et il suffit qu'il existe une extension Ω de k telle que Ω soit algébriquement clos et $X \otimes_k \Omega$ irréductible.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons un tel Ω et soit K un extension de k. Soit L un corps algébriquement clos contenant Ω et K. Puisque $X \otimes_k \Omega$ est irréductible, il vient par (2.8) que $X \otimes_k L$ est également irréductible. Mais (2.3) appliqué au K-schéma $X \otimes_k K$ et à l'extension L de K assure que $X \otimes_k K$ est irréductible, ce qui conclut. □

Fait 3.3. Soit Y un k-schéma.

1. Si Y est irréductible et X est géométriquement irréductible, alors $X \times_k Y$ est irréductible.
2. Si X et Y sont géométriquement irréductibles, alors $X \times_k Y$ est géométriquement irréductible.

Démonstration. Commençons par remarquer que 2 se déduit aisément de 1. Supposons donc que Y est irréductible et que X est géométriquement irréductible. Il suffit alors d'appliquer (2.5) à la projection $X \times_k Y \to Y$ qui est surjective et (universellement) ouverte, comme changement de base de $X \to \mathrm{Spec}(k)$; de plus, pour $y \in Y$ on a $p^{-1}(y) = X \otimes_k \kappa(y)$ qui est irréductible par hypothèse sur X. □

Le théorème suivant donne une caractérisation birationnelle de l'irréductibilité géométrique:

Théorème 3.4. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Le k-schéma X est géométriquement irréductible.

(ii) Pour toute extension finie séparable K de k, $X \otimes_k K$ est irréductible.

(iii) Le schéma X est irréductible, et si x est sont point générique, alors $\kappa(x)$ est une extension primaire de k.

Démonstration. L'implication de (ii) par (i) est évidente. Montrons que (ii) implique (iii). D'emblée X est irréductible, de point générique x. De plus, si K est une extension finie séparable de k, alors le point (i) de (2.2), appliqué à $p : X \otimes_k K \to X$, assure que les points génériques de $X \otimes_k K$ sont ceux de $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_k K)$. L'irréductibilité de $X \otimes_k K$ est donc équivalente à celle de $\mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_k K)$, ce qui, par (2.7), assure que $\kappa(x)$ est une extension primaire de k.

Le paragraphe précédent montre, en filigrane, que (iii) implique (i). □

Sous de bonnes hypothèses, on peut également étendre les scalaires à une extension galoisienne de k de sorte que le schéma ainsi obtenu ait des composantes irréductible qui soient géométriquement irréductibles:

Proposition 3.5. Supposons que X soit irréductible de point générique x et que la clôture séparable k' de k dans $\kappa(x)$ soit finie sur k. Si k'' est une extension galoisienne de k contenant k', les composantes irréductibles de $X \otimes_k k''$ sont au nombre de $[k' : k]$ et sont géométriquement irréductibles. De plus, ce nombre est également le nombre géométrique de composantes irréductibles de X.

Démonstration. La seconde partie de l'énoncé découle de la première par (2.4). Soit $p : X \otimes_k k'' \to X$ la projection. En vertu du point (i) de (2.2), les points génériques de $X \otimes_k k''$ sont ceux de $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_k k'')$. Or, ce k''schéma est réunion disjointe de $[k' : k]$ copies de $\mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_{k'} k'')$, qui est irréductible et dont le corps résiduel au générique est une extension primaire de k'' par (2.7). Il suit donc de (3.4) que chacune de ces composantes irréductibles est géométriquement irréductible, ce qui conclut. □

Corollaire 3.6. Supposons que X a un nombre fini de points génériques x_i et que la clôture séparable k_i de k dans $\kappa(x_i)$ soit finie sur k. Si L est une extension galoisienne de k contenant les k_i, alors $X \otimes_k L$ admet $\sum_i [k_i : k]$ composantes irréductibles et celles-ci sont toutes géométriquement irréductibles. De plus, ce nombre est égal au nombre géométrique de composantes irréductibles de X.

Démonstration. Notons $p : X \otimes_k L \to X$ la projection et soit x un point générique de X. Les points génériques au-dessus de $\overline{\{x\}}$ sont ceux de $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(\kappa(x) \otimes_k L)$. Il reste alors à appliquer (3.5) à $p^{-1}(x)$, ce qui conclut. □

Énonçons enfin le fait suivant, dont la démonstration se lit entre les lignes de celle de (2.6):

Fait 3.7. Supposons que X est irréductible sur k et soit K une extension de k. Si X' est une composante irréductible de $X \otimes_k K$, la projection $X' \to X$ est surjective.

Démonstration. Soit E une base de transcendance de K sur k et $L = k(E) \subseteq K$. Il suit de (2.7) que X_L est irréductible. Mais puisque $X' \to X_L$ est un morphisme entier et dominant, il est surjectif. Puisque la projection $X_L \to X$ est également surjective, il s'ensuit que la projection $X' \to X$ est surjective. □

4 Connexité géométrique

[Gro65, §4.5]

Dans la suite, k est un corps et X un k-schéma. La propriété de connexité géométrique souffre du fait qu'elle n'est pas un invariant birationnel de variétés connexes, comme en témoigne l'exemple (4.4). Néanmoins, elle jouit de plusieurs propriétés intéressantes.

Définition 4.1. Le k-schéma X est dit géométriquement connexe lorsque pour toute extension K de k, le schéma $X \otimes_k K$ est connexe.

Fait 4.2. Pour que le k-schéma X soit géométriquement connexe, il faut et il suffit qu'il existe une extension Ω de k telle que Ω soit algébriquement clos et $X \otimes_k \Omega$ connexe.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de (3.2). □

Fait 4.3. Soit Y un k-schéma.

1. Si Y est connexe et X est géométriquement connexe, alors $X \times_k Y$ est connexe.
2. Si X et Y sont géométriquement connexe, alors $X \times_k Y$ est géométriquement connexe.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de (3.3). □

Exemple 4.4. Voir [Gro65, (4.5.12)(ii)].

Afin d'énoncer un critère de connexité géométrique, nous avons besoin d'un premier lemme:

Lemme 4.5. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de k-schémas. Si Y est non vide, géométriquement connexe, et si X est connexe, alors X est géométriquement connexe.

Démonstration. Notons $\overline{f} : Y \otimes_k \overline{k} \to X \otimes_k \overline{k}$ le morphisme obtenu de f par extension des scalaires, et $p : X \otimes_k \overline{k} \to X$ le morphisme de projection, lequel est ouvert et fermé (car entier). Soit U une partie ouvert et fermée non vide de $X \otimes_k \overline{k}$: alors $p(U)$ est une partie ouverte et fermée non vide de X d'où il suit que $p(U) = X$. Ainsi, puisque Y est non vide il vient que $\overline{f}^{-1}(U)$ est non vide: ce dernier étant ouvert et fermé dans $Y \otimes_k \overline{k}$, on en déduit que $\overline{f}^{-1}(U) = Y \otimes_k \overline{k}$. Si U était strictement inclus dans $X \otimes_k \overline{k}$, on montrerait également que l'image réciproque de son complémentaire par $\overline{f}$ serait égale à $Y \otimes_k \overline{k}$, ce qui est absurde. Ainsi $U = X \otimes_k \overline{k}$, ce qui conclut. $\square$

Proposition 4.6. Soit Y un k-schéma et $f : Y \to X$ un k-morphisme. Si Y est géométriquement connexe, alors la composante connexe X_0 de X contenant $f(Y)$ est géométriquement connexe.

Démonstration. On peut d'emblée supposer que Y est réduit. Alors, f se factorise sous la forme $Y \to X_0 \to X$ et le résultat s'en déduit en appliquant (4.5) au k-morphisme $Y \to X_0$. $\square$

Corollaire 4.7. Soit x un point de x tel que $\kappa(x)$ est une extension primaire de k. Alors la composante connexe de X contenant x est géométriquement connexe.

Démonstration. Il suffit d'appliquer (4.6) au morphisme $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$, où $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$ est géométriquement irréductible en vertu du point (iii) de (3.4). $\square$

5 Un mot sur les espaces homogènes

Au cours de cette section, k est un corps, k' sa clôture parfaite et G un k-schéma en groupes.

Définition 5.1. Un espace homogène sous G est un k-schéma X muni d'une action (à gauche) de G telle que le graphe $G \times_k X \to X \times_k X$ de l'action, défini par $(g, x) \mapsto (x, g.x)$, est surjectif.

Proposition 5.2. Soit X un espace homogène sous G.

(i) X est géométriquement ponctuellement irréductible sur k, c'est-à-dire que pour toute extension K de k, chaque $x \in X_K$ appartient à une unique composante irréductible de X_K.

(ii) Chaque anneau local de $(X_{k'})_{\text{réd}}$ est normal.

(iii) Si η est un point générique de $(X_{k'})_{\text{réd}}$, $C = \overline{\{\eta\}}$ et L la clôture algébrique de k dans $\kappa(\eta)$, alors C est un L-schéma géométriquement irréductible.

(iv) En particulier si x est un point rationnel de X, la composante irréductible de X contenant x est géométriquement irréductible sur k.

Démonstration. Montrons les points (i) et (ii). D'une part, l'homogénéité de X sous G étant invariante par changement de base, il s'agit de montrer que chaque $x \in X$ appartient à une unique composante irréductible de X; d'autre part, le morphisme $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ étant un homéomorphisme universel, on peut supposer que k est parfait, et par suite que G et X sont réduits. Choisissons η un point générique de X, $\kappa(\eta) = \mathscr{O}_{X,z}$ son corps résiduel (l'égalité ayant lieu car X est réduit), et z un point de X au-dessus de η. Remarquons que puisque k est parfait, $\mathrm{Spec}(\kappa(\eta) \otimes_k K)$ est normal pour toute extension K de k (cf. [Gro65, (6.4.12)]), si bien que tout point de X_K au-dessus de η est normal. Comme X est un G-espace homogène, choisissons $\gamma \in G \times_k X$ dont l'image par $G \times_k X \to X \times_k X$ se projette sur η et z. En posant

$K = \kappa(\gamma)$, on dispose alors de points rationnels g de G_K, η' de X_K tels que η' est au-dessus de η et $g\eta'$ au-dessus de z. Puisque η' est au-dessus de η, il est normal, et par suite $g\eta'$ également. Mais comme la projection $X_K \to X$ est plate, il s'ensuit que z, au-dessus duquel se trouve $g\eta'$, est également normal (cf [Gro65, (2.1.13)]), ce qui conclut.

Pour montrer le point (iii), il est immédiat que C est défini sur L: ce dernier étant algébriquement clos dans $L(C)$, il suit du point (iii) de (3.4) que C est géométriquement irréductible.

Montrons le point (iv). Soit x un point rationnel de X et C la composante irréductible de X contenant c. Si K est une extension de k, on sait d'emblée qu'il existe un unique point $x' \in X_K$ au-dessus de x. De plus, il vient de (3.7) que si C' est une composante irréductible de X_K qui se projette dans X, alors $C' \to C$ est surjective, et donc contient x'. Or, il suit du point (i) qu'il existe une unique composante irréductible de X_K contenant x', ce qui conclut.

Corollaire 5.3. De plus, si X est supposé noethérien, les composantes connexes de X sont irréductibles.

□

6 Références

[Bou50] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique: Algèbre; Chapitre 4-7.* Hermann, 1950.

[GP11] Philippe Gille and Patrick Polo, editors. *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes*, volume 7 of *Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)]*. Société Mathématique de France, Paris, 2011. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1962–64], A seminar directed by M. Demazure and A. Grothendieck with the collaboration of M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud and J-P. Serre, Revised and annotated edition of the 1970 French original.

[Gro65] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24):231, 1965.