Constructibilité, théorème de Chevalley et topologie constructible

L'auteur de ces notes ne prétend pas à l'originalité et suit presque fidèlement [Gro67, chapitre IV, §§1.8, 1.9, 1.10].

Table des Matières

0 Ensembles constructibles

Dans cette section X désigne un espace topologique.

0.1 Généralités

Définition 0.1. Une partie Z de X est dite *rétrocompacte dans* X si l'inclusion $Z \hookrightarrow X$ est quasi-compacte.

Une partie de X est dite *constructible* si elle est combinaison booléenne d'ouverts rétrocompacts.

Remarque 0.2. Tout fermé de X est rétrocompact. Toute réunion finie de rétrocompacts de X est rétrocompacte. Toute intersection finie d'ouverts rétrompacts de X est un ouvert rétrocompact.

Proposition 0.3. Une partie de X est constructible si et seulement si elle est réunion de parties de la forme $U \cap V^c$ où U et V sont des ouverts rétrocompacts de X.

Démonstration. Toute formule propositionnelle étant équivalente à une disjonction de conjonctions, toute partie constructible est une réunion finie de parties s'écrivant sous la forme $\bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} V_j^c$ où I et J sont finis, et U_i, V_j sont des ouverts rétrocompacts. En réécrivant

$$\bigcap_i U_i \cap \bigcap_j V_j^c = \bigcap_i U_i \cap \left(\bigcup_j V_j \right)^c$$

et du fait que toute réunion finie et toute intersection finie d'ouverts rétrocompacts sont des ouverts rétrocompacts (0.2), il suit que $\bigcap_i U_i \cap \bigcap_j V_j^c$ s'écrit sous la forme $U \cap V^c$ avec U et V des ouverts rétrocompacts. La réciproque est immédiate. $\square$

Corollaire 0.4. Une partie constructible de X est rétrocompacte.

Démonstration. Par (0.2) il suffit de vérifier que $U \cap V^c$ est rétrocompacte dès que U et V sont des ouverts rétrocompacts de X. Si W est un ouvert quasi-compact de X, alors $W \cap U \cap V^c$ est un fermé du quasi-compact $W \cap U$ et donc est quasi-compact. □

Corollaire 0.5. Un ouvert de X est constructible si et seulement si il est rétrocompact.

Démonstration. Un ouvert constructible de X est rétrocompact par (0.4) et la réciproque est vraie par (0.1). □

Proposition 0.6. Soit W un ouvert de X et E une partie de X.

(i) Si E est constructible dans X alors $E \cap U$ est constructible dans U.

(ii) Si U est rétrocompact dans X et E est une partie constructible de U alors E une partie constructible de X.

Démonstration. (i) Par (0.3), on est ramené à montrer que si E est un ouvert rétrocompact de X, alors $E \cap U$ est un ouvert rétrocompact de U. Or, si W est un ouvert quasi-compact de U, alors $E \cap U \cap W = E \cap W$, lequel est quasi-compact par hypothèse sur E.

(ii) Par (0.3), on est ramené au cas où $E = W \cap V^c$ où W et V sont des ouverts rétrocompacts de U. Puisque U est rétrocompact, U et V sont également rétrocompacts dans X. Par conséquent, en écrivant $E = W \cap (U - V)$, E est combinaison booléenne d'ouverts rétrocompacts de X et est donc constructible dans X. □

Corollaire 0.7. Supposons que X admet un recouvrement fini (U_i) par des ouverts rétrocompacts. Si E est une partie de X telle que $E \cap U_i$ est constructible dans U_i, alors E est constructible dans X.

Définition 0.8. Une partie E de X est dite *localement constructible* si pour tout x dans X il existe un voisinage ouvert U de x tel que $E \cap U$ est constructible dans U.

Proposition 0.9. Si X est quasi-compact et admet un recouvrement par des ouverts rétrocompacts, alors toute partie localement constructible est constructible.

Démonstration. Ceci découle de (0.7). □

Proposition 0.10. Si X admet une base d'ouverts rétrocompacts, toute partie localement constructible de X est rétrocompacte.

Démonstration. Soient E est une partie localement constructible de X et W un ouvert quasi-compact de X. Par hypothèse, on peut trouver un recouvrement fini (U_i) de W par des ouverts rétrocompacts de X tels que $U_i \cap E$ est constructible dans U_i. Alors, $E \cap W = \cup_i U_i \cap E$ et puisque $U_i \cap E$ est constructible dans U_i, elle est également constructible dans X par (ii) (0.6): elle est donc rétrocompacte dans X et finalement $E \cap W$ est rétrocompact dans X. Mais puisque $E \cap W$ est l'image réciproque de l'ouvert quasi-compact W par l'inclusion $E \cap W \hookrightarrow X$, il suit que $E \cap W$ est quasi-compact. □

0.2 Cas noethérien

Dans ce paragraphe, X est supposé noethérien. Dans ce cas, tout ouvert est rétrocompact et donc les parties constructibles sont exactement les combinaison booléennes d'ouverts. On en déduit que si X' est une partie constructible de X et E une partie de X' alors E est constructible dans X' si et seulement si elle est constructible dans X.

Proposition 0.11. Si X est irréductible, une partie constructible de X est dense si et seulement si elle est d'intérieur non vide.

Démonstration. Soit E une partie constructible dense de X. On écrit $E = \bigcup_i U_i \cap F_i$ où les U_i sont des ouverts non vides et les F_i des fermés non vides (0.3). Alors, $X = \overline{E} \subseteq \bigcup_i F_i$ et puisque X est irréductible, il existe i tel que $F_i = X$ d'où il vient que E contient U_i. La réciproque est claire. □

Proposition 0.12. Une partie E de X est constructible si et seulement si pour tout fermé irréductible Y de X, $E \cap Y$ est d'intérieur non vide ou nulle part dense dans Y.

Démonstration. Le sens direct est conséquence de (0.11) puisque si Y est un fermé irréductible de X, il est noethérien et $E \cap Y$ est une partie constructible de Y qui, si elle n'est pas nulle part dense, est dense (par irréductibilité) et donc d'intérieur non vide en vertu de (0.11).

Pour la réciproque, on raisonne par induction noethérienne sur l'ensemble des Y fermés de X tels que $E \cap Y$ est constructible (dans Y ou dans X, ceci est équivalent). On peut donc supposer que pour tout fermé Y propre de X, $E \cap Y$ est constructible. Si X n'est pas irréductible, on note X_i ses composantes irréductibles: les $E \cap X_i$ sont constructibles par hypothèse et il en va donc de même pour leur réunion qui est E. Si X est irréductible il faut distinguer deux cas: soit E est nulle part dense auquel cas il existe un fermé propre F de X tel que $E \subseteq F$ et donc $E = E \cap F$ est irréductible; soit E est d'intérieur non vide, donc contient un ouvert non vide U, si bien que $E = U \cup (E \cap F)$ est constructible comme union de constructibles. □

1 Le théorème de Chevalley

Commençons par une série de remarques concernant les notions précédentes dans le cas où l'espace topologique est celui sous-jacent à un schéma:

Remarque 1.1. (i) Si X est un schéma quasi-séparé, alors tout ouvert affine étant quasi-compact il est rétrocompact: donc X admet une base d'ouverts rétrocompacts. En particulier, toute partie localement constructible de X est rétrocompacte par (0.10).

(ii) Si X est un schéma quasi-compact et quasi-séparé, les parties localement constructibles de X sont constructibles en vertu de (0.9).

Proposition 1.2. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de schémas, l'image réciproque d'une partie localement constructible est localement constructible.

Démonstration. Soit E une partie localement constructible de Y. Quitte à supposer Y affine, on peut se ramener au cas où E est constructible puis, par commutation de l'image réciproque aux opérations booléennes, au cas où E est un ouvert rétrocompact de Y. Puisque $E \hookrightarrow Y$ est quasi-compact, son changement de base par f est également quasi-compact: autrement dit $f^{-1}(E) \hookrightarrow Y$ est quasi-compact, d'où il suit que $f^{-1}(E)$ est un ouvert rétrocompact de X, ce qui conclut. □

L'énoncé du théorème de Chevalley est:

Théorème 1.3 (théorème de Chevalley)**.** Un morphisme de présentation finie $f : X \to Y$ envoie toute partie localement constructible de X sur une partie localement constructible de Y.

La première étape de la démonstration de (1.3) consiste en une réduction au cas noethérien. Commençons par le lemme suivant, utile dans toute la suite:

Lemme 1.4. *Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé et Z une partie constructible de X. Il existe un schéma affine X' et un morphisme de présentation finie $f : X' \to X$ tel que $f(X') = Z$.*

Démonstration. On peut supposer que X est affine par (ii) (1.1): en effet, si X_i est un recouvrement affine fini de X et si on a $f_i : X'_i \to X_i$ de présentation finie avec X'_i affine et tel que $f_i(X'_i) = Z \cap X_i$, alors les $g_i \circ f_i : X'_i \to X$ sont de présentation finie (où g_i désigne l'inclusion $X_i \hookrightarrow X$ qui est de présentation finie car X est quasi-séparé et quasi-compact); en notant X' le schéma somme des X'_i et $f : X' \to X$ le morphisme obtenu par somme des g_i, on obtient alors le résultat souhaité.

On est donc ramené au cas où X est affine, et par un argument analogue au précédent on peut supposer que $Z = U \cap V^c$ où U et V sont des ouverts rétrocompacts de X: le même argument permet enfin de supposer que U est un ouvert affine de X. Le morphisme d'inclusion $U \hookrightarrow X$ est alors de présentation finie (il est localement de présentation finie comme immersion ouverte, quasi-compact et quasi-séparé comme morphisme affine), donc son changement de base par l'immersion fermée $V^c \hookrightarrow X$ est de présentation finie: finalement, le morphisme $f : U \times_X V^c \to X$ est de présentation finie comme composée des morphismes de présentation finie $U \times_X V^c \to V^c$ et $V^c \to X$ (ce dernier est de présentation finie car V étant quasi-compact, V^c est un sous-schéma fermé de X défini par un idéal finiment engendré). Puisque $f(U \times_X V^c) = U \cap V^c$, il suit que f convient. □

Pour se ramener au cas noethérien dans (1.3), des arguments analogues à ceux utilisés dans la démonstration de (1.4) permettent de supposer que X et Y sont affines. De plus, puisque X est quasi-compact et quasi-séparé (car affine), on a X' affine et $g : X' \to X$ de présentation finie tel que $g(X') = E$ par (1.4), ce qui permet de se ramener au cas où $E = X$ en remplaçant f par $f \circ g$. On utilise ensuite:

Lemme 1.5. *Soit A_0 un anneau, (A_λ) un système inductif de A_0 algèbres, $A = \operatorname{colim}_\lambda A_\lambda$ et B une A-algèbre de présentation finie. Il existe un indice λ ainsi qu'une A_λ-algèbre B_λ de présentation finie telle que B est A-isomorphe à $B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$.*

Démonstration. Considérons une présentation finie $B = A\,[X_1, \ldots, X_n]\,/(f_1, \ldots, f_r)$ et notons $\varphi_\lambda : A_\lambda \to A$ les morphismes canoniques. Il existe alors un indice λ tel que les coefficients des f_i soient dans $\varphi_\lambda(A_\lambda)$. On pose alors $B_\lambda = A_\lambda\,[X_1, \ldots, X_n]\,/(f_1, \ldots, f_r)$, laquelle algèbre convient. □

Dans notre cas, écrivons $X = \operatorname{Spec}(B)$ et $Y = \operatorname{Spec}(A)$ et posons $A_0 = \mathbf{Z}$ si bien que A est la limite inductive de ses sous anneaux de type fini. En vertu de (1.5), on a un sous-anneau de type fini C de A ainsi qu'une C-algèbre de présentation finie D tels que le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ T := \operatorname{Spec}(D) \arrow[r, "g"'] & S := \operatorname{Spec}(C) \end{tikzcd}$$

où g désigne le morphisme induit par $C \to D$. On en déduit que $f\left(p^{-1}(T)\right) = q^{-1}(g(T))$, autrement dit que $f(X) = q^{-1}(g(T))$. Par (1.2), il suffit donc de montrer que $g(T)$ est constructible dans S. Puisque C est D sont noethériens, on est ramené à démontrer le corollaire suivant de (1.3):

Corollaire 1.6. Si X et Y sont des schémas affines noethériens et $f : X \to Y$ un morphisme de type fini, alors $f(X)$ est constructible.

Si $X = \bigcup_i X_i$ est la décomposition en composantes irréductibles de X, alors $f(X) = \bigcup_i f(X_i)$ et on est donc ramené au cas où X est irréductible. Dans ce cas, si Z désigne la composante irréductible de Y contenant $f(X)$, le morphisme f se factorise en $X \to Z \hookrightarrow Y$ et on peut donc également supposer que Y est irréductible. En désignant alors par $\varphi : A := \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y) \to B := \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ le morphisme définissant f et $\mathfrak{p}$ son noyau et en factorisant f par $X \to \mathcal{V}(\mathfrak{p}) \hookrightarrow Y$, on peut supposer que $Y = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire que Y est intègre.

Or, on dispose du lemme suivant, démontré dans [Bou64, §3, numéro 1, corollaire 3 du théorème 1]:

Lemme 1.7. Si A est un anneau intègre et B une A-algèbre de type fini, il existe a dans A tel que tout morphisme $\varphi : A \to K$ de A dans un corps algébriquement clos K vérifiant $\varphi(a) \neq 0$ s'étend en un morphisme $B \to K$.

Écrivons $X = \operatorname{Spec}(B)$ et $Y = \operatorname{Spec}(A)$. En vertu des réductions précédentes, la A-algèbre B vérifie les conditions de (1.7). On en déduit que $Y_a \subseteq f(X)$ et donc que $f(X)$ est d'intérieur non vide, d'où il suit que $f(X)$ est constructible, en vertu de (0.12).

2 La topologie constructible

2.1 Parties ind-constructibles et pro-constructibles

Proposition 2.1. Soit A un anneau, (A'_λ) un système inductif de A-algèbres et $A' = \operatorname{colim} A'_\lambda$. On pose $X = \operatorname{Spec}(A)$, $X'_\lambda = \operatorname{Spec}(A'_\lambda)$, $X' = \operatorname{Spec}(A')$, $f' : X' \to X$ induit par $A \to A'$ et $f'_\lambda : X'_\lambda \to X$ induit par $A \to A'_\lambda$.

(i) Pour que $X' = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe λ tel que $X'_\lambda = \emptyset$.

(ii) On a $f'(X') = \bigcap_\lambda f'_\lambda(X'_\lambda)$.

Démonstration. Le point (i) découle du fait que $A' = 0$ si et seulement si l'unité de A' est nulle, ce qui est vérifié si et seulement si il existe λ tel que l'unité de A'_λ est nulle et donc si et seulement si il existe λ tel que $A'_\lambda = 0$.

Le morphisme f' se factorise en $X' \to X'_\lambda \to X$ d'où on déduit que le membre de gauche est inclus dans le membre de droite. Pour l'inclusion inverse, considérons x dans $\bigcap_\lambda f'_\lambda(X'_\lambda) - f'(X')$. On en déduit que $f'^{-1}(x) = \operatorname{Spec}(A' \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}_x)) = \lim \operatorname{Spec}(A'_\lambda \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}_x))$ est vide, et donc qu'il existe λ tel que $\operatorname{Spec}(A'_\lambda \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}_x))$ est vide par (i), d'où il suit que $x \notin f'_\lambda(X'_\lambda)$, ce qui conclut. □

Commençons par le lemme suivant, omniprésent dans la suite:

Lemme 2.2. Soit X un schéma quasi-compact, quasi-séparé, E une partie de X, un recouvrement affine (X_α) de X et $E_\alpha = E \cap X_\alpha$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe un schéma X' et un morphisme quasi-compact $f : X' \to X$ tel que $E = f(X')$.

(ii) Pour tout α, il existe un schéma X'_α et un morphisme quasi-compact $f_\alpha : X'_\alpha \to X_\alpha$ tel que $f(X'_\alpha) = E_\alpha$.

(iii) Pour tout α, il existe un schéma affine X'_α ainsi qu'un morphisme $f_\alpha : X'_\alpha \to X_\alpha$ tel que $f(X'_\alpha) = E_\alpha$.

(iv) La partie E est intersection de parties constructibles de X.

(v) La partie $X - E$ est réunion de parties constructibles de X.

Démonstration. L'équivalence de (i), (ii), et (iii) relève d'arguments de somme de morphismes utilisés dans la démonstration de (1.4). L'équivalence de (iv) et (v) est évidente.

Montrons que (iii) implique (iv). On se ramène tout d'abord au cas où X est affine et le recouvrement (X_α) est trivial: en effet, puisque X est quasi-compact, on peut supposer le recouvrement (X_α) fini et donc $X = \bigcup_\alpha E_\alpha$ est une réunion finie d'intersections de constructibles, donc une intersection de constructibles. Par hypothèse, on a alors un morphisme quasi-compact $f : X' \to X$ tel que $f(X) = E$, puis on pose $X' = \mathrm{Spec}(A')$ et $X = \mathrm{Spec}(A)$.

On peut ensuite se ramener au cas où $A \to A'$ est de type fini. Si (A'_λ) désigne le système inductif des A-algèbres de type fini incluses dans A', on a $A' = \mathrm{colim}_\lambda A'_\lambda$ et donc $X' = \lim \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$. Le morphisme f se factorise alors en $X' \to X'_\lambda \to X$ où $X'_\lambda = \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$ et $f_\lambda : X'_\lambda \to X$ est le morphisme de type fini donné par $A \to A'_\lambda$: il suit de (2.1) que $f(X) = \bigcap_\lambda f_\lambda(X'_\lambda)$ et on peut donc supposer que $f = f_\lambda$, autrement dit que f est de type fini.

On se ramène enfin au cas où $A \to A'$ est de présentation finie. Considérons une présentation $A\left[X_1, \ldots, X_n\right]/I$ de A'. En écrivant I comme la limite inductive de ses sous idéaux finiment engendrés I_λ, et en utilisant que les limites filtrantes sont exactes dans la catégories des A-modules, il vient que $A' = \mathrm{colim}\, A\left[X_1, \ldots, X_n\right]/I_\lambda$. Un raisonnement analogue au paragraphe précédent permet alors de se ramener au cas où $A \to A'$ est de type fini.

Du fait que $A \to A'$ est de présentation finie et du fait que f est affine, on déduit que f est de présentation finie. Il suit alors de (1.3) que $f(X')$ est localement constructible dans X, et donc constructible en vertu de (ii) (0.2).

Reste à démontrer que (iv) implique (iii). On peut donc supposer X affine et écrivons $E = \bigcap_{\lambda \in L} G_\lambda$ où les G_λ sont constructibles. En vertu de (1.4) il existe des schémas affines $X'_\lambda = \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$ et des morphismes $f_\lambda : X'_\lambda \to X$ tels que $f(X'_\lambda) = G_\lambda$. Si J est une partie finie de L, posons $A'_J = \bigotimes_{\lambda \in J} A'_\lambda$, si bien que les A'_J forment une famille inductive d'anneaux dont on note $A' = \mathrm{colim}\, A'_J$ la limite inductive. En posant $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $X'_J = \mathrm{colim}\,\mathrm{Spec}(A'_J)$ et $f' : X' \to X$, $f'_J : X'_J \to X$ les morphismes donnés par $A \to A'$ et $A \to A'_J$, il vient par (2.1) que $f'(X') = \bigcap_{J \subseteq L, \text{fini}} f'_J(X'_J)$ où $f'_J(X'_J) = \bigcap_{\lambda \in J} f'_\lambda(X'_\lambda)$. Il suit donc que $f'(X') = \bigcap_\lambda f'_\lambda(X'_\lambda) = \bigcap_\lambda G_\lambda = E$, ce qui conclut. $\square$

Définition 2.3. Une partie E d'un espace topologique X est *pro-constructible* si pour tout x de X, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $E \cap U$ est une intersection de parties localement constructibles de U.

La partie E est *ind-constructible* si pour tout x de X, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $E \cap U$ est une réunion de parties localement constructibles de U.

Les parties pro-constructibles et ind-constructibles jouissent des propriétés suivantes:

Proposition 2.4. Soit X un schéma.

(i) Pour qu'une partie de X soit pro-constructible, il faut et il suffit que son complémentaire soit ind-constructible.

(ii) Toute intersection (resp. réunion) de parties pro-constructibles (resp. ind-constructibles) est pro-constructible (resp. ind-constructible).

(iii) Toute réunion finie (resp. intersection finie) de parties pro-constructibles (resp. ind-constructibles) est pro-constructible (resp. ind-constructible).

(iv) Si X est quasi-compact et quasi-séparé, une partie pro-constructible de X est intersection de parties constructibles.

(v) Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X. Pour qu'une partie E de X soit pro-constructible (resp. ind-constructible), il faut et il suffit que pour tout α, $E \cap U_\alpha$ soit pro-constructible (resp. ind-constructible).

(vi) Toute partie pro-constructible de X est rétrocompacte. Réciproquement, une partie localement fermée et rétrocompacte de X est pro-constructible.

(vii) Soit $f : X' \to X$ un morphisme de schéma. Si E est une partie pro-constructible de X alors $f^{-1}(E)$ est une partie pro-constructible de X'.

(viii) Si $f : X' \to X$ est un morphisme quasi-compact et E est une partie pro-constructible de X', alors $f(E)$ est pro-constructible dans X.

(ix) Si $f : X' \to X$ est localement de présentation finie et E est une partie ind-constructible de X', alors $f(E)$ est ind-constructible dans X.

(x) Supposons que X est quasi-compact et quasi-séparé. Pour qu'une partie E de X soit pro-constructible de X, il faut et il suffit qu'il existe un schéma affine X' et $f : X' \to X$ quasi-compact tel que $f(X') = E$.

Démonstration. Les assertions (i), (ii), (iii) et (v) sont vraies par définition. Pour montrer (iv), on se donne E une partie pro-constructible de X et (U_α) un recouvrement affine fini de X tel que $E \cap U_\alpha$ est intersection de parties localement constructibles G^α_λ de U_α: puisque U_α est quasi-compact et quasi-séparé, G^α_λ est constructible dans U_α (0.12); de plus, U_α étant rétrocompact dans X, les G^α_λ sont constructibles dans X, par (ii) de (0.6). En conséquent, E est la réunion (finie) des $\bigcap_\lambda G^\alpha_\lambda$: la commutation mutuelle de l'intersection à la réunion finie assure que E est intersection de constructibles de X et donc que E est pro-constructible. De plus, la démonstration de (vii) est analogue à celle de (1.2), et (x) est une reformulation de (2.2).

Pour montrer la première partie de (vi), on peut se ramener au cas où X est affine: dans ce cas, si E est une partie pro-constructible de X, elle est intersection de constructibles par (iv). Alors, en vertu de (1.4), il existe X' un schéma affine et un morphisme $f : X' \to X$ tel que $f(X') = E$, mais puisque X' est quasi-compact, l'image de X' par l'application continue f est quasi-compacte: autrement dit, E est une partie quasi-compacte de X et donc E est rétrocompact dans X. La deuxième partie de (vi) résulte de (viii): en effet, si E est localement fermé, on peut le munir d'une structure de sous-schéma de X, et on dispose alors d'un morphisme $j : E \to X$ qui est quasi-compact par hypothèse, ce qui par (viii) assure que $E = j(E)$ est pro-constructible.

Pour démontrer (viii), on peut commencer par se ramener au cas où X et X' sont affines. Dans ce cas, il existe X'' affine par (2.2) et $g : X'' \to X'$ quasi-compact tels que

$g(X'') = E$. Quitte à remplacer f par $g \circ f$, on peut alors supposer que $E = X'$, auquel cas (viii) suit de (x).

Enfin, pour démontrer (ix), on se ramène au cas où X et X' sont affines, auquel cas le résultat suit de (1.3). □

2.2 La topologie constructible

Soit X un schéma. Il suit de (2.4) que l'ensemble des parties ind-constructibles de X définit une topologie sur X, appelée la topologie constructible, dont les fermés sont les parties pro-constructibles; ceci motive:

Définition 2.5. On note X^{cons} l'ensemble X muni de la topologie constructible.

3 Application aux morphismes ouverts

Proposition 3.1. Soit X un schéma et E une partie ind-constructible de X. Pour qu'un point x de E soit intérieur à E, il faut et il suffit que $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)$ soit inclus dans E.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Réciproquement, supposons que $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x) \subseteq E$. On se ramène facilement au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, si bien que par (x) (2.4), il existe un schéma affine $X' = \operatorname{Spec}(A')$ et un morphisme $f : X' \to X$ tel que $f(X') = X - E$. Par hypothèse, il vient que $X' \times_X \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est vide et donc que $A' \otimes_A A_{\mathfrak{p}_x = 0}$. Il suit qu'il existe $t \notin \mathfrak{p}_x$ tel que $A' \otimes_A A_t = 0$: autrement dit, $f^{-1}(\mathcal{D}(t))$ est vide, et donc $\mathcal{D}(t) \subseteq E$, ce qui conclut. □

On en déduit le résultat d'ouverture suivant:

Théorème 3.2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie, x un point de X et $y = f(x)$. Le morphisme f est ouvert au voisinage de x si et seulement si le morphisme $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est surjectif.

Démonstration. La condition est suffisante car si $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est surjectif, alors $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y) \subseteq f(X)$, laquelle partie est ind-constructible en vertu de (x) (2.4). Il suit alors de (3.1) que y est dans l'intérieur de $f(X)$. Quitte à réduite X, ceci montre que l'image de tout voisinage de x est un voisinage de y, et donc que f est ouverte en x.

Reste à montrer que la condition est nécessaire. On peut d'emblée supposer que $X = \operatorname{Spec}(B)$ et $Y = \operatorname{Spec}(A)$, si bien que (2.1) entraîne que $f(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)) = \bigcap_{s \notin \mathfrak{p}_x} f(\mathcal{D}(s))$. Puisque, pour $s \notin \mathfrak{p}_x$, $f(\mathcal{D}(t))$ est par hypothèse un voisinage de y, il suit que $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y) \subseteq f(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x))$, ce qui montre bien que $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_y) \to \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_x)$ est surjectif. □

Corollaire 3.3. Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ localement de présentation finie soit ouvert, il faut et il suffit que $f(X)$ soit clos par générisation.

Références

[Bou64] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5: Entiers. Chapitre 6: Valuations.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.

[Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.