2-catégories, catégories fibrées et descente

Elyes Boughattas

March 29, 2020

Ce texte se veut un résumé concis mais complet des différentes notions catégoriques qui mènent aux définitions des champs algébriques. Les vérifications et démonstrations qui sont omises sont laissées au soin du lecteur.

Cette version, qui brasse uniquement le volet catégorique préliminaire à la théorie des champs, sera par la suite complétée de notes de survol sur les champs algébriques.

1 2-catégories

Dans cette section, les mots-clefs sont:

2-catégorie, sous 2-catégorie, pseudo-foncteur, pseudo-transformation, modification, 2-catégorie des pseudo-foncteurs, équivalence de 2-catégories.

Définition 1.1 (2-catégories)**.** Une 2-catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée:

(i) d'une catégorie, encore notée $\mathcal{C}$, dont les objets sont appelés des 0-cellules et les flèches des 1-cellules;

(ii) pour toutes 0-cellules a, b, d'une structure de catégorie sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$, dont les flèches sont appelées les 2-cellules de $\mathcal{C}$. On note une 2-cellule α entre deux 1-cellules f et g par $\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & b \end{tikzcd}$;

(iii) pour toutes 0-cellules a, b, c, la donnée d'un foncteur

$$\mu_{a,b,c} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,c) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,c)$$

qui étend la composition $\circ$ dans $\mathcal{C}$;

et la composition de 2-cellules dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ est dite *verticale* et est notée $\circ$, tandis que celle de 2-cellules via $\mu_{a,b,c}$ est dite *horizontale* et est notée $\star$. On demande également que:

(1) la composition horizontale soit associative;

(2) pour toute 0-cellule a, la 2-cellule id_{id_a} est une unité pour la composition horizontale.

Remarque 1.2. Toute catégorie $\mathcal{C}$ peut être dotée d'une structure de 2-catégorie en munissant, pour tous $a, b \in ob(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ d'une structure de catégorie discrète.

Définition 1.3 (sous 2-catégorie)**.** Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie. Une sous 2-catégorie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ est une 2-catégorie telle que $ob(\mathcal{A})$ est une partie de $ob(\mathcal{C})$, telle que pour tous $a, b \in ob(\mathcal{A})$ on ait $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b)$ qui est une partie de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ et telle que la composition de 1-cellules, la composition horizontale et la composition verticale dans $\mathcal{A}$ soient héritées de celles de $\mathcal{C}$.

Exemple 1.4. La catégorie des catégories, notée **Cat**, est une 2-catégorie dont les 0-cellules sont les catégories, les 1-cellules sont les foncteurs et les 2-cellules sont les transformations naturelles. On y distinguera la sous-catégorie des catégories discrètes, notée **DCat**, et celles des groupoïdes, notée **Grpd**.

Définition 1.5 (pseudo-foncteurs)**.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ des 2-catégories. Un pseudo-foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ est la donnée:

(i) d'une application $F : ob(\mathcal{A}) \to ob(\mathcal{C})$;

(ii) pour tous $a, b \in ob(\mathcal{A})$, d'un foncteur $F_{a,b} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(a), F(b))$;

(iii) pour tout $a \in ob(\mathcal{A})$ d'un 2-isomorphisme $\alpha_a : id_{F(a)} \xrightarrow{\sim} F(id_a)$

(iv) pour toutes flèches composables g et f de $\mathcal{A}$, d'un 2-isomorphisme

$$\alpha_{g,f} : F(g \circ f) \xrightarrow{\sim} F(g) \circ F(f)$$

naturel en f et g.

On demande également que F satisfasse aux conditions suivantes:

(1) pour toute flèche $f : a \to b$ dans $\mathcal{A}$, on a $\alpha_b \star id_{F(f)} = \alpha_{id_b,f}$, ce qui se réécrit

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow id_{F(f)}"] & F(b) \arrow[r, bend left, "id_{F(b)}"] \arrow[r, bend right, "F(id_b)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_b"] & F(b) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(id_b) \circ F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_{id_b,f}"] & F(b) \end{tikzcd} ;$$

(2) pour toute flèche $f : a \to b$ dans $\mathcal{A}$, on a $id_{F(f)} \star \alpha_a = \alpha_{f,id_a}$;

(3) pour toutes flèches composables h, g et f de $\mathcal{A}$, on a

$$\left(\alpha_{h,g} \star id_{F(f)}\right) \circ \alpha_{h,g\circ f} = \left(id_{F(h)} \star \alpha_{g,f}\right) \circ \alpha_{h,g\circ f}$$

ce qui signifie que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} F(h \circ g \circ f) \arrow[r, "\alpha_{h,g\circ f}"] \arrow[d, "\alpha_{h\circ g,f}"'] & F(h) \circ F(g \circ f) \arrow[d, "id_{F(h)} \star \alpha_{g,f}"] \\ F(h \circ g) \circ F(f) \arrow[r, "\alpha_{h,g} \star id_{F(f)}"'] & F(h) \circ F(g) \circ F(f) \end{tikzcd} .$$

Remarque 1.6. Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une catégorie munie de sa structure canonique de 2-catégorie, la donnée du foncteur $F_{a,b}$ de (ii) est équivalente à la donnée d'une application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(a), F(b))$ et la condition de naturalité de (iv) est automatique.

Définition 1.7 (transformations pseudo-naturelles)**.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ des 2-catégories et $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ des pseudo-foncteurs. Une *transformation pseudo-naturelle*, encore appelée *pseudo-transformation*, est la donnée, pour chaque $a \in ob(\mathcal{A})$, d'une 1-cellules $\tau_a : F(a) \to G(a)$ et, pour chaque flèche $f : a \to b$ de $\mathcal{A}$, d'un 2-isomorphisme $\tau_f : G(f) \circ \tau_a \xrightarrow{\sim} \tau_b \circ F(f)$ naturel en f. On requiert également que:

(1) pour tout $a \in ob(\mathcal{A})$, on a $\tau_{id_a} \circ \left(\alpha_a^G \star id_{\tau_a}\right) = id_{\tau_a} \star \alpha_a^F$, ce qui se traduit par la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
id_{G(a)} \circ \tau_a \arrow[r, "\alpha^G_{G(a)} \star id_{\tau_a}"] \arrow[d, equal] & G(id_a) \circ \tau_a \arrow[d, "\tau_{id_a}"] \\
\tau_a \circ id_{F(a)} \arrow[r, "id_{\tau_a} \star \alpha^F_a"'] & \tau_a \circ F(id_a)
\end{tikzcd} \quad ;$$

(2) pour toutes flèches $f : a \to b$ et $g : b \to c$ de $\mathcal{A}$, on a

$$\big(id_{\tau_c} \star \alpha^F_{g,f}\big) \circ \tau_{g\circ f} = \big(\tau_g \circ id_{F(f)}\big) \circ \big(id_{G(g)} \star \tau_f\big) \circ \big(\alpha^G_{g,f} \star id_{\tau_a}\big)$$

ce qui se lit dans la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
G(g\circ f) \circ \tau_a \arrow[r, "\alpha^G_{g\circ f} \star id_{\tau_a}"] \arrow[d, "\tau_{g\circ f}"'] & G(g) \circ G(f) \circ \tau_a \arrow[r, "id_{G(g)} \circ \tau_f"] & G(g) \circ \tau_b \circ F(f) \arrow[d, "\tau_g \star id_{F(f)}"] \\
\tau_c \circ F(g\circ f) \arrow[rr, "id_{\tau_c} \star \alpha^F_{g,f}"'] & & \tau_c \circ F(g) \circ F(f)
\end{tikzcd} .$$

Définition 1.8 (modifications)**.** Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ des 2-catégories, $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ des pseudo-foncteurs et $\sigma, \tau : F \dot{\to} G$ des transformations pseudo-naturelles. Une *modification* $m : \sigma \ddot{\to} \tau$ de σ vers τ est la donnée, pour chaque $a \in ob(\mathcal{A})$, d'une 2-cellule $m_a : \sigma_a \to \tau_a$. On requiert également que pour tout morphisme $f : a \to b$ de $\mathcal{A}$ on ait:

$$\tau_f \circ \big(id_{G(f)} \star m_a\big) = \big(m_b \star id_{F(f)}\big) \circ \sigma_f .$$

Définition 1.9 (2-catégorie des pseudo-foncteurs)**.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des 2-catégories. On définit la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, notée $[\mathcal{C}; \mathcal{D}]$, dont:

(1) les 0-cellules sont les pseudo-foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$;

(2) les 1-cellules sont les transformations pseudo-naturelles;

(3) les 2-cellules sont les modifications entre transformations pseudo-naturelles.

Définition 1.10 (équivalence de 2-catégories)**.** Une équivalence entre des 2-catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la donnée de pseudo-foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $G \circ F$ (resp. $F \circ G$) est pseudo-naturellement isomorphe à $id_{\mathcal{C}}$ (resp. $id_{\mathcal{D}}$).

2 Catégories fibrées

2.1 Généralités

Dans cette sous-section, les mots-clefs sont:

flèche cartésienne, catégorie fibrée, catégorie fibrée en groupoïdes, en setoïdes, 2-catégorie des catégories fibrées, clivage, clivage normal, scindé.

Définition 2.1 (flèche cartésienne)**.** Soit $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ un foncteur entre catégories. Une flèche $f : a \to b$ de $\mathcal{C}$ est dite *cartésienne* lorsque pour toue flèche $g : w \to b$ de $\mathcal{C}$ et toute flèche $h : p(w) \to p(a)$ vérifiant $p(f) \circ h = p(g)$, il existe une unique flèche $k : w \to a$ telle que $f \circ k = g$ et $h = p(k)$. La situation se lit dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[dr, dotted, "\exists! k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[dd, rightsquigarrow] & & \\
& a \arrow[r, "f"] \arrow[dd, rightsquigarrow] & b \arrow[dd, rightsquigarrow] \\
p(w) \arrow[dr, "h"'] \arrow[drr, bend left, "p(g)"] & & \\
& p(a) \arrow[r, "p(f)"'] & p(b)
\end{tikzcd}$$

où une flèche $c \rightsquigarrow d$ avec $c \in ob(\mathcal{C})$ et $d \in ob(\mathcal{S})$ signifie que $d = p(c)$. Lorsque g est une flèche de $\mathcal{S}$, on appelle *relèvement cartésien* de g toute flèche cartésienne f telle que $p(f) = g$.

Remarque 2.2. Une composée de flèches cartésiennes est cartésienne. Les isomorphismes sont cartésiens. Un relèvement cartésien est unique à unique isomorphisme près. Un relèvement cartésien d'un relèvement cartésien est également un relèvement cartésien.

Définition 2.3 (catégorie fibrée)**.** Une *catégorie fibrée* est un foncteur $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ tel que pour toute flèche $g : c \to d$ et tout $b \in ob(\mathcal{C})$ avec $p(b) = d$, il existe une flèche $f : a \to b$ telle que f est un relèvement cartésien de g. On dit encore que $\mathcal{C}$ est fibrée au-dessus de $\mathcal{S}$ via p – et on omettra souvent la mention de p lorsqu'il n'y a aucune confusion possible.

Remarque 2.4. Une composée de catégories fibrées est une catégorie fibrée.

Exemple 2.5. Soit $\mathcal{S}$ une catégorie. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les flèches de $\mathcal{S}$ et les morphismes entre deux flèches $f : b \to a$ et $g : d \to c$ est un couple (φ, ψ) s'inscrivant dans un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & a \arrow[d, "\psi"] \\
d \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

la composition étant définie en collant deux tels carrés, et l'identité de f étant donnée par (id_b, id_a). On définit ensuite un foncteur $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ en envoyant une flèche $f : b \to a$ sur a et un morphisme (φ, ψ) sur ψ. Pour qu'une flèche $f : d \to c$ admette un relèvement cartésien au-dessus d'une flèche $g : a \to c$, il faut et il suffit que le produit fibré $d \times_{f,c,g} a$ existe. On en déduit que p est une catégorie fibrée si et seulement si $\mathcal{C}$ admet les produits fibrés.

Soit $\mathcal{S}$ une catégorie et $s \in ob(\int)$. On définit $\mathcal{S}/s$ la catégorie des objets de $\mathcal{S}$ au-dessus de s et on pose $q : \mathcal{S}/s \to \mathcal{S}$ la projection: q est alors une catégorie fibrée.

Notations 2.6. Lorsque $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ est une catégorie fibrée et $S \in ob(\mathcal{S})$, on note $\mathcal{C}(S)$ la catégorie dont les objets sont les $c \in ob(\mathcal{C})$ tels que $p(c) = S$ et les flèches sont les $f : c \to c'$ vérifiant $p(f) = id_S$.

Lorsque $f : d \to c$ est une flèche de $\mathcal{S}$ et $a \in \mathcal{C}(c)$, on appelle *image inverse* de a via f tout $d \in ob(\mathcal{C}(d))$ tel qu'il existe un relèvement cartésien $g : d \to c$ de f – et un tel relèvement est nécessairement unique.

On rappelle qu'un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont des isomorphismes, et qu'un setoïde est un groupoïde pour lequel chaque objet admet un unique automorphisme (à savoir l'identité).

Définition 2.7 (catégorie fibrée en groupoïdes, en setoïdes)**.** On dit d'une catégorie fibrée $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ qu'elle est ***fibrée en groupoïdes*** lorsque pour tout $s \in ob(\mathcal{S})$, la catégorie $\mathcal{C}(s)$ est un groupoïde. On dit également qu'elle est ***fibrée en setoïdes*** lorsque $\mathcal{C}(s)$ est un setoïde.

Définition 2.8 (2-catégorie des catégories fibrées)**.** Soit $\mathcal{S}$ une catégorie. On définit la 2-catégorie des catégories fibrées au-dessus de $\mathcal{S}$, notée $\mathbf{Fib}(\mathcal{S})$, dont:

(1) les 0-cellules sont les catégories fibrées au-dessus de $\mathcal{S}$;

(2) les 1-cellules entre deux catégories fibrées $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ et $p' : \mathcal{C}' \to \mathcal{S}$ sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tels que $p' \circ F = p$ et qui envoient les flèches cartésiennes sur des flèches cartésiennes;

(3) les 2-cellules entre deux 1-cellules F et F' sont les transformations naturelles de F vers F'.

On définit, de même, la 2-catégorie des catégories fibrées en groupoïdes (resp. en setoïdes) en demandant en outre que $\mathcal{C}(s)$ soit un groupoïde (resp. un setoïde).

Fait 2.9. Soit $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une catégorie fibrée, $f : d \to c$ une flèche de $\mathcal{S}$ et $\varphi : a' \to a$ une flèche de $\mathcal{C}(c)$. Lorsque $b \xrightarrow{g} a$ (resp. $b' \xrightarrow{g'} a'$) est une image inverse de a (resp. a') via f, il existe une unique flèche $\psi : b' \to b$ de $\mathcal{C}(d)$ qui fasse commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
& b' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dl, dotted, "\exists!\psi"'] \arrow[dd, rightsquigarrow] & & a' \arrow[dl, "\varphi"] \arrow[dd, rightsquigarrow] \\
b \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, rightsquigarrow] & & a \arrow[dd, rightsquigarrow] & \\
& d \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "id"'] & & c \arrow[dl, "id"] \\
d \arrow[rr, "f"'] & & c &
\end{tikzcd}.$$

Remarque 2.10. Avec les notations de 2.9, considérons $\varphi' : a'' \to a'$ est également une flèche de $\mathcal{C}(c)$ et si b'' est une image inverse de a'' par f. Si on note $\psi' : b'' \to b'$ l'unique application obtenue telle que dans 2.9 associée à φ', et $\psi'' : b'' \to b'$ celle associée à $\varphi \circ \varphi'$, alors $\psi'' = \psi \circ \psi'$.

Définition 2.11 (clivage)**.** Soit $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une catégorie fibrée. Un *clivage* de p est la donnée, pour tout morphisme $f : d \to c$ d'une application $f^* : \mathcal{C}(c) \to \mathcal{C}(d)$ qui envoie chaque objet sur une de ses images inverses, et qui à une flèche $\varphi : a' \to a$ de $\mathcal{C}(c)$ associe la flèche $\psi : f^*a' \to f^*a$ décrite par le fait 2.9. L'application f^* est alors un foncteur en vertu de la remarque 2.10.

Remarque 2.12. Si on fait le choix d'un clivage pour p et si $f : e \to d$ et $g : d \to c$ sont des flèches de $\mathcal{S}$, alors il existe un unique isomorphisme naturel entre les foncteurs $(g \circ f)^*$ et $f^* \circ g^*$. De plus, pour tout $c \in ob(\mathcal{S})$, il existe un unique isomorphisme naturel entre $(id_c)^*$ et $id_{\mathcal{C}(c)}$.

Définition 2.13 (clivage normalisé et scindé)**.** Un clivage de $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ est dit *normalisé* si pour tout $c \in ob(\mathcal{S})$ on a $(id_c)^* = id_{\mathcal{C}(c)}$. On dit qu'il est *scindé* s'il est normalisé et si pour toutes flèches composables f et g de $\mathcal{S}$ on a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2.2 Construction de Grothendieck

Fixons une catégorie $\mathcal{S}$. Cette sous-section vise à montrer qu'on a une équivalence de 2-catégories entre $\mathbf{Fib}(\mathcal{S})$ et $[\mathcal{S}^{\mathrm{op}}; \mathbf{Cat}]$.

Pour construire un pseudo-foncteur $F : \mathbf{Fib}(\mathcal{S}) \to [\mathcal{S}^{\mathrm{op}}; \mathbf{Cat}]$ commençons par faire le choix d'un clivage pour chaque catégorie fibrée, puis procédons comme suit:

(i) au niveau des 0-cellules, on envoie une catégorie fibrée $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ sur le pseudo-foncteur $F(p) : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ défini en:

  (a) envoyant un objet c sur $\mathcal{C}(c)$;

  (b) envoyant une flèche $f : d \to c$ de $\mathcal{S}$ sur $f^* : \mathcal{C}(c) \to \mathcal{C}(d)$;

  (c) si $c \in ob(\mathcal{S})$, on définit $\alpha_c^{F(p)}$ comme étant l'unique isomorphisme naturel $id_{\mathcal{C}(c)} \xrightarrow{\sim} (id_c)^*$ évoqué dans 2.10;

  (d) si $f : e \to d$ et $g : d \to c$, on définit $\alpha_{g,f}$ comme étant l'unique isomorphisme naturel $(g \circ f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \circ g^*$ évoqué dans 2.10.

(ii) pour des catégories fibrées $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ et $q : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$, on définit le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib}(\mathcal{S})}(p, q) \to \mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\mathrm{op}};\mathbf{Cat}]}(F(p), F(q))$ comme suit:

  (a) on envoie une 1-cellule $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sur la pseudo-transformation τ définie pour chaque $s \in ob(\mathcal{S})$ par le foncteur $\tau_s : \mathcal{C}(s) \to \mathcal{D}(s)$ qui correspond à l'application induite par G, puis pour chaque flèche $f : d \to c$ dans $\mathcal{S}$, par l'unique isomorphisme naturel $\tau_f : \tau_d \circ f^*_{\mathcal{C}} \to f^*_{\mathcal{D}} \circ \tau_c$;

  (b) on envoie une 2-cellule $\tau : G \dot{\to} H$ sur la modification $m : \tau^G \ddot{\to} \tau^H$ définie, pour chaque $s \in ob(\mathcal{S})$, par la transformation naturelle $m_s : \tau_s^G \dot{\to} \tau_s^H$ telle que pour chaque $a \in ob(\mathcal{C}(s))$ on ait $(m_s)_a = \tau_a$.

Il s'agit maintenant de construire un pseudo-foncteur $\displaystyle\int : [\mathcal{S}^{\mathrm{op}}; \mathbf{Cat}] \to \mathbf{Fib}(\mathcal{S})$. Cette construction porte le nom de *construction de Grothendieck* et est opérée comme suit:

(i) au niveau des 0-cellules, on envoie un pseudo-foncteur $G : \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ sur la catégorie fibrée $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ où p est défini par:

  (a) $ob(\mathcal{C}) = \{(x, s) : s \in ob(\mathcal{S}), x \in G(s)\}$ et une flèche $(x, s) \to (y, t)$ est la donnée d'une flèche $f : s \to t$ dans $\mathcal{S}$ et d'une flèche $a : x \to G(f)(y)$ dans $G(s)$, la composée de deux flèches $(a, f) : (x, s) \to (y, t)$ et $(b, g) : (y, t) \to (z, u)$ étant définie par $\left(\left(\alpha^G_{g,f}\right)_z \circ (G(f)(b)) \circ a, g \circ f\right)$, et l'identité de (x, s) étant donnée par (id_x, id_s);

  (b) le foncteur $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ est défini sur les objets pas $(x, s) \mapsto s$ et sur les flèches par $(a, f) \mapsto f$;

  (c) il reste à vérifier que p est fibrée: pour ce faire, considérons $f : t \to s$ une flèche de $\mathcal{S}$ et $c = (x, s) \in ob(\mathcal{C})$. Posons $d = (G(f)(x), t)$ et montrons que la flèche $l = (id_{G(f)(x)}, f) : d \to c$ est cartésienne. À cet effet, choisissons $w = (z, u) \in ob(\mathcal{C})$ ainsi que des flèches $g : w \to c$ et $h : u \to t$. Il s'agit de montrer qu'il existe une unique flèche $k = (a, v) : w \to d$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[rrd, bend left, "g"] \arrow[rd, dotted, "\exists ! k"] \arrow[dd, squiggly] & & \\
& d \arrow[r, "l"] \arrow[dd, squiggly] & c \arrow[dd, squiggly] \\
u \arrow[rrd, bend left, "p(g)"] \arrow[rd, "h"'] & & \\
& t \arrow[r, "f"'] & s
\end{tikzcd}.$$

Si un tel k existe, on a d'emblée $v = u$. De plus, la condition $l \circ k = g$ se réécrit $g = \left(\left(\alpha^G_{f,h}\right)_x \circ \left(G(h)(id_{G(f)(x)})\right) \circ a, f \circ h\right)$, ce qui détermine uniquement a car $G(h)(id_{G(f)(x)}) = id_{G(h)(G(f)(x))}$, ce qui montre l'unicité de k. Cette même identité permet d'obtenir a et montre l'existence de k.

(ii) pour des pseudo-foncteurs $G, H : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$, de catégories fibrées associées $p : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ et $q : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$, on définit le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\text{op}};\mathbf{Cat}]}(G, H) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib}(\mathcal{S})}(p, q)$$

de la manière suivante:

(a) au niveau des 1-cellules, si $\tau : G \dot{\to} H$ est une pseudo-transformation on lui associe le $\mathcal{S}$-foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ défini en envoyant $(x, s) \in ob(\mathcal{C})$ sur $(\tau_s(x), s) \in ob(\mathcal{D})$ et une flèche $(a, f) : (x, s) \to (y, t)$ de $\mathcal{C}$ sur la flèche $((\tau_f)_y^{-1} \circ \tau_s(a), f) : (\tau_s(x), s) \to (\tau_s(y), t)$. Il reste à vérifier que le $\mathcal{S}$-foncteur ainsi défini envoie une flèche cartésienne sur une flèche cartésienne, ce qui est omis;

(b) au niveau des 2-cellules, soient $\tau, \sigma : G \dot{\to} H$ des pseudo-transformations, s'envoyant sur des $\mathcal{S}$-foncteurs $T, S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $m : \sigma \ddot{\to} \tau$ une modification. On définit alors une transformation naturelle $\rho : S \to T$ via, pour tout $(x, s) \in ob(\mathcal{C})$, le morphisme $\rho_{(x,s)} = (m_x, id_s)$.

Il reste maintenant à vérifier que les pseudo-foncteurs F et $\displaystyle\int$ forment un couple d'équivalence de 2-catégories, laquelle vérification est laissée au lecteur.

Fait 2.14. Si $G : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ est un foncteur, alors $\displaystyle\int G$ est scindée.

Remarque 2.15. On obtient mutatis mutandis des énoncés analogues en changeant «catégorie fibrée» par «catégorie fibrée en groupoïdes» et «catégories fibrées en setoïdes».

Exemple 2.16. On reprend ici les notations et les exemples de 2.5.

Si la catégorie $\mathcal{S}$ possède les produits fibrés et si on fait un choix de produits fibrés, le pseudo-foncteur $F(p) : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ est alors défini en envoyant un objet s sur la catégorie des flèches de but s, et envoie une flèche $f : t \to s$ sur $f^* : F(p)(s) \to F(p)(t)$ qui envoie $g : c \to s$ sur la projection $c \times_{g,s,f} t \to t$.

Si $\mathcal{S}$ est une catégorie, le pseudo-foncteur $F(q) : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ n'est autre que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-, s)$.

2.3 Le 2-lemme de Yoneda

Les mots-clefs de cette sous-section sont:

2-lemme de Yoneda, scinder une catégorie fibrée.

Théorème 2.17 (2-lemme de Yoneda)**.** Soit $\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une catégorie fibrée et $s \in ob(\mathcal{S})$. Le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/s, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}(s)$$

défini en envoyant un morphisme $G : \mathcal{S}/s \to \mathcal{C}$ sur $G(s)$ et une transformation $\tau : G \dot{\to} H$ sur τ_s, est une équivalence de catégories.

Démonstration. Comment par faire le choix d'un clivage pour $\mathcal{C}$. Il s'agit de construire un pseudo-inverse

$$\mathcal{C}(s) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}/s, \mathcal{C}).$$

Au niveau des objets, on envoie $c \in ob(\mathcal{C}(s))$ sur le foncteur $G_c : \mathcal{S}/s \to \mathcal{C}$ qui envoie $t \xrightarrow{f} s \in ob(\mathcal{S}/s)$ sur f^*c et un morphisme $t' \xrightarrow{f} t \xrightarrow{g} s$ sur la flèche composée $(g \circ f)^*c \xrightarrow{(\alpha_{g,f})_c} f^* \circ g^*(c) \to g^*(c)$.

Au niveau des morphismes, on envoie une flèche $\varphi : c \to d$ sur la transformation naturelle $\tau : G_c \dot{\to} G_d$ définie par $\tau_{t \xrightarrow{f} s} = f^*\varphi : G_c(f) \to G_d(f)$.

Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que le foncteur ainsi défini est un pseudo-inverse de celui de l'énoncé. □

Remarque 2.18. En vertu de la section 2.2, le théorème 2.17 est équivalent à l'énoncé suivant. Soit $\mathcal{S}$ une catégorie, $s \in ob(\mathcal{S})$ et $G : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ un pseudo-foncteur. Alors, le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\text{op}};\mathbf{Cat}]}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,s), G) \to G(s)$$

défini en envoyant une pseudo-transformation τ sur $\tau_s(id_s) \in G(s)$ et une modification $m : \tau \dddot{\to} \sigma$ sur $m_s(id_s)$, est une équivalence de catégories.

Proposition 2.19 (scinder une catégorie fibrée)**.** Toute catégorie fibrée est équivalente à une catégorie fibrée qui est scindée.

Démonstration. En utilisant l'équivalence de 2-catégories de la section 2.2, on peut raisonner en termes de pseudo-foncteurs. Soit donc $G : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ un pseudo-foncteur et posons $\widetilde{G} : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ le foncteur défini en envoyant un objet s sur $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\text{op}};\mathbf{Cat}]}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,s), G)$ et en envoyant une flèche $t \xrightarrow{f} s$ sur le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\text{op}};\mathbf{Cat}]}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,s), G) \to \mathrm{Hom}_{[\mathcal{S}^{\text{op}};\mathbf{Cat}]}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,t), G)$$

défini via le tiré en arrière $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,t) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(-,s)$.

On a une pseudo-transformation $\tau : \widetilde{G} \to G$ définie par le foncteur de 2-Yoneda de la remarque 2.18: par cette même remarque, τ définit une équivalence entre G est $\widetilde{G}$. Or $\displaystyle\int \widetilde{G}$ est une catégorie fibrée scindée en vertu de 2.14, ce qui conclut. □

3 Descente dans les catégories fibrées

Dans cette section, les mots-clefs sont:

catégorie des données de descente, données de descente effectives.

Avant d'aller plus loin, enrichissons nos exemples de catégories fibrées.

Exemple 3.1. Soit $\mathcal{S}$ un site. On va définir un foncteur $\mathrm{Sh} : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ en posant: pour chaque $X \in ob(\mathcal{S})$, $\mathrm{Sh}(X)$ comme étant la catégorie discrète des faisceaux d'ensembles sur X; pour chaque flèche $f : Y \to X$ de $ob(\mathcal{S})$, on définit le foncteur $\mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(Y)$ envoyant un faisceau $\mathscr{F}$ sur le faisceau envoyant une flèche $g : T \to Y$ sur $\mathscr{F}(T \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X)$.

On peut naturellement introduire des variantes de cet exemple en considérant les faisceaux en groupes abéliens, les faisceaux d'anneaux...

Exemple 3.2. Soit $\mathcal{S}$ un site sur la catégorie des schémas. On va définir un foncteur $\mathrm{QCoh} : \mathcal{S}^{\text{op}} \to \mathbf{Cat}$ en posant: pour chaque schéma X, comme étant la catégorie discrète des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents; pour chaque morphisme de schémas $f : Y \to X$, on définit le foncteur $\mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{QCoh}(Y)$ envoyant un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ sur $f^*\mathscr{F} = f^{-1}\mathscr{F} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X$.

Définition 3.3 (catégorie des données de descente)**.** Soit $\mathcal{S}$ un site et $\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une catégorie fibrée, dont on choisit un clivage. Soit également $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$ un recouvrement dans le site $\mathcal{S}$ et, pour chaque triplet i, j, k d'indices on note $U_{ij} = U_i \times_U U_j$ (resp. $U_{ijk} = U_i \times_U U_j \times_U U_k$) et pr_i la projection sur U_i (resp. pr_{ij} la projection sur $U_i \times_U U_j$). La *catégorie des données de descente sur $\mathcal{U}$*, notée $\mathcal{C}_{\text{desc}}(\mathcal{U})$, est donnée par:

(1) ses objets, qui sont les couples $((\xi_i), \varphi_{ij})$ où (ξ_i) est un uplet d'éléments de $\mathcal{C}(U_i)$, $\varphi_{ij} : pr_i^*\xi_i \xrightarrow{\sim} pr_j^*\xi_j$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}(U_{ij})$, et ce couple doit satisfaire la condition de cocyclicité:

$$pr_{ik}^*\varphi_{ik} = pr_{ij}^*\varphi_{ij} \circ pr_{jk}^*\varphi_{jk} : pr_k^*\xi_k \to pr_i^*\xi_i;$$

(2) un morphisme de couples $((\zeta_i), \varphi_{ij}) \to ((\xi_i), \psi_{ij})$ est la donnée d'une famille de flèches $(\alpha_i : \zeta_i \to \xi_i)$ dans $\mathcal{C}(U_i)$ faisant commuter le diagramme suivant, pour tout couple d'indices i, j:

$$\begin{tikzcd} pr_j^*\zeta_j \arrow[r, "pr_j^*\alpha_j"] \arrow[d, "\varphi_{ji}"'] & pr_j^*\xi_j \arrow[d, "\psi_{ji}"] \\ pr_i^*\xi_i \arrow[r, "pr_i^*\alpha_i"'] & pr_i^*\eta_i \end{tikzcd}.$$

Définition 3.4 (descente effective)**.** Si $\mathcal{S}$ est un site, $\mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une catégorie fibrée et $\mathcal{U} = \{f_i : U_i \to U\}$ un recouvrement dans $\mathcal{S}$, on dispose d'un foncteur:

$$\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}_{\text{desc}}(\mathcal{U})$$

défini en envoyant $c \in ob(\mathcal{C}(U))$ sur $((f_i^*c), \varphi_{i,j})$, où $\varphi_{i,j} : pr_i^*(f_i^*c) \to pr_j^*(f_j^*c)$ est le morphisme canonique, et envoyant un morphisme $\alpha : d \to c$ de $\mathcal{C}(U)$ sur la famille $(f_i^*(\alpha))$.

On dira qu'une donnée de descente sur $\mathcal{U}$ est *effective* si elle dans l'image essentielle du foncteur précédent. On dira que toutes les données de descente sont effectives si le foncteur précédent est une équivalence de catégories.