Motifs avec transferts

Elyes Boughattas

Mai 2019

Lorsque k est un corps de caractéristique nulle et Λ un anneau (commutatif unitaire), Voevodsky a défini dans [VSF00] deux catégories notées $\mathbf{DM}_{-}^{\mathrm{eff,ét}}(k;\Lambda)$ et $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{ét}}(k;\Lambda)$ ("gm" comme "géométrique"), dont les constructions précises sont données dans [MVW06].

Nous étudions ici une version légèrement différente, dite *catégorie des motifs (non effectifs) avec transferts* et notée $\mathbf{DM}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$. La construction de cette catégorie est sensiblement identique à celle de la catégorie des motifs $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$ effectuée en cours: à la différence de cette dernière, où la première étape de construction consiste à "linéariser" la catégorie $\mathbf{Sm}(k)$ des variétés lisses sur k en la remplaçant par la catégorie des faisceaux étales en Λ-modules, la construction de $\mathbf{DM}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$, qui occupe la totalité du premier paragraphe, requiert la définition de ce que nous appelons les faisceaux avec transferts.

Néanmoins Cisinski et Déglise ont montré dans [CD09], en suivant une idée de Morel, que si Λ est une $\mathbf{Q}$-algèbre alors les catégories $\mathbf{DM}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$ et $\mathbf{DA}^{\mathrm{ét}}(k,\Lambda)$ sont équivalentes. Par la suite, Ayoub a développé leur argument et montré dans [Ayo14c] que le résultat reste vrai avec Λ un anneau quelconque. Dans le paragraphe 2, on énonce le théorème de comparaison et, en admettant le résultat difficile de Cisinski et Déglise, on esquisse comment se ramener au cas général par un argument de dévissage.

Enfin, si les deux catégories de motifs sont équivalentes, il est légitime de se demander quel est l'avantage de la construction avec transferts sur celle sans transferts. On suggère ainsi sans démonstration, dans le paragraphe 3, une application de cette équivalence au calcul du groupe de morphismes entre certains motifs, ce qui est un résultat de Voevodsky.

Table des Matières

1 Construction des motifs avec transferts **3**

1.1 La catégorie des correspondances finies 3

1.2 Préfaisceaux et faisceaux avec transferts 4

1.2.1 Préfaisceaux avec transferts 4

1.2.2 Faisceaux étales avec transferts 5

1.3 Les motifs effectifs avec transferts 6

1.4 Les motifs non effectifs avec transferts 6

1.4.1 L_{tr}-spectres avec transferts 6

1.4.2 Définition des motifs non effectifs avec transferts . 7

2 Comparaison de motifs avec et sans transferts **9**

2.1 Énoncé du théorème de comparaison 9

2.2 Canevas de la démonstration dans le cas non effectif . . . 10

3 Invariance homotopique des faisceaux avec transferts et calcul du groupe des morphismes entre motifs **12**

3.1 Invariance homotopique des préfaisceaux avec transferts . 12

3.2 Groupe des morphismes entre motifs 13

4 Références **14**

Dans le présent mémoire, on convient que le corps de base, noté k, est de caractéristique nulle et on fixe un anneau (commutatif unitaire) Λ.

On supposera également que tous les schémas qui interviennent dans la suite sont des k-schémas séparés et on note $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des k-schémas lisses.

1 Construction des motifs avec transferts

1.1 La catégorie des correspondances finies

On commence par élargir la classe des morphismes de $\mathbf{Sm}(k)$ pour obtenir une catégorie additive.

Définition 1.1. Soient X et Y des objets de $\mathbf{Sm}(k)$. Une *correspondance élémentaire* de X dans Y est un sous-schéma fermé intègre de $X \times_k Y$ tel que la projection $W \longrightarrow X$ est finie et domine une composante connexe de X.

Le groupe abélien libre engendré par les correspondances élémentaires de X dans Y est noté $Cor(X, Y)$ et on dit que ses éléments sont les *correspondances finies* de X dans Y.

Remarque 1.1. La définition assure que si $X = \coprod_i X_i$ est la décomposition de X en composantes irréductibles, alors $Cor(X, Y) = \bigoplus_i Cor(X_i, Y)$.

Exemple 1.1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de k-schémas. Si X est connexe, son graphe Γ_f définit une correspondance élémentaire de X dans Y. Sinon, la somme des composantes connexes de Γ_f définit une correspondance finie de X dans Y.

En particulier, l'identité induit une correspondance finie de X dans X, notée id_X, qui est élémentaire si X est connexe.

Si X, Y et Z sont des objets de $\mathbf{Sm}(k)$, on note p_{XY}, p_{XZ} et p_{YZ} les projections de $X \times_k Y \times_k Z$. Pour définir la composition de deux correspondances finies, on dispose du lemme suivant:

Lemme 1.1. Soient X, Y, Z des objets de $\mathbf{Sm}(k)$ et $V \in Cor(X, Y)$, $W \in Cor(Y, Z)$ des correspondances élémentaires. Alors les cycles $p_{XY}^*(V)$ et $p_{YZ}^*(W)$ s'intersectent proprement dans $X \times_k Y \times_k Z$ et le poussé en avant $p_{XZ,*}(p_{XY}^*(V).p_{YZ}^*(W))$ est fini et surjectif au-dessus d'une composante connexe de X.

Démonstration. [MVW06, lemme 1.7] □

À l'aide de ce lemme, on définit alors une application bi-additive

$$Cor(X,Y) \times Cor(Y,Z) \longrightarrow Cor(X,Z)$$

en envoyant des correspondances élémentaires $V \in Cor(X,Y)$ et $W \in Cor(Y,Z)$ sur

$$W \circ V = p_{XZ,*}\left(p_{XY}^*(V).p_{YZ}^*(W)\right).$$

On vérifie aisément que cette application est associative et que id_X, défini dans l'exemple 1.1, est l'identité de $Cor(X,X)$.

Définition 1.2. La catégorie $\mathbf{SmCor}(k)$ est celle dont les objets sont ceux de $\mathbf{Sm}(k)$ et les morphismes entre deux k-schémas lisses X et Y sont les correspondances finies de X dans Y.

La définition de $\mathbf{SmCor}(k)$ associée à l'exemple 1.1 donne alors un foncteur $\mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathbf{SmCor}(k)$ qui est l'identité sur les objets et qui envoie $f : X \longrightarrow Y$ sur la correspondance finie associée à Γ_f. On note $[X]$ l'image d'un schéma X par ce foncteur.

Notons que la somme directe sur $\mathbf{SmCor}(k)$ est donnée par la réunion disjointe. De plus, on peut munir $\mathbf{SmCor}(k)$ d'une structure monoïdale symétrique via

$$[X] \otimes [Y] = [X \times_k Y].$$

1.2 Préfaisceaux et faisceaux avec transferts

1.2.1 Préfaisceaux avec transferts

Définition 1.3. Un *préfaisceau avec transferts* est un foncteur additif contravariant $F : \mathbf{SmCor}(k) \longrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$. On note $\mathbf{PST}(k)$ la catégorie dont les objets sont les préfaisceaux avec transferts et les morphismes les transformations naturelles: c'est une catégorie abélienne.

Remarque 1.2. Soit F est un préfaisceau avec transfert. En le restreignant à la sous-catégorie $\mathbf{Sm}(k)$ de $\mathbf{SmCor}(k)$, on en déduit un préfaisceau en Λ-modules de $\mathbf{Sm}(k)$ muni d'applications de "transfert" supplémentaires $F(Y) \longrightarrow F(X)$ indexées par les correspondances finies de X dans Y.

Exemple 1.2. Tout préfaisceau constant A sur $\mathbf{Sm}(k)$ peut être vu comme un préfaisceau avec transferts: si W est une correspondance élémentaire de X dans Y (supposés connexes), le morphisme $A \longrightarrow A$ défini par W est donné par le degré de W dans X.

Définition 1.4. Si X est un objet de $\mathbf{Sm}(k)$, on définit $\Lambda_{tr}(X)$ comme le préfaisceau avec transfert qui envoie $U \in \mathbf{SmCor}(k)$ sur $Cor(U, X) \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ et $f : U \longrightarrow V$ sur $f \otimes id_\Lambda$. On définit de la sorte un foncteur $\mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathbf{PST}(k)$.

Définition 1.5. Si (X_i, x_i) est un schéma pointé pour $i = 1, \dots, n$, on définit $\Lambda_{tr}\left((X_1, x_1) \wedge \cdots \wedge (X_n, x_n)\right)$ par

$$\operatorname{coker}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda_{tr}(X_1 \times \cdots \times \hat{X}_i \times \cdots \times X_n) \xrightarrow{id_1 \times \cdots \times x_i \times \cdots \times id_n} \bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda_{tr}(X_1 \times \cdots \times X_n)\right).$$

1.2.2 Faisceaux étales avec transferts

Définition 1.6. Un préfaisceau avec transferts est un *faisceau étale avec transferts* s'il induit un faisceau étale sur la sous-catégorie $\mathbf{Sm}(k)$. On note $\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t}\left(\mathbf{Sm}(k); \Lambda\right)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PST}(k)$ des faisceaux étales avec transferts.

Lemme 1.2. Pour tout schéma lisse X sur k, $\Lambda_{tr}(X)$ est un faisceau étale avec transferts.

Démonstration. [MVW06, lemme 6.2] □

Notons $\phi : \mathbf{PST}(k) \longrightarrow \mathbf{Psh}(\mathbf{Sm}(k))$ le foncteur d'oubli:

Théorème 1.1. Si F est un préfaisceau avec transferts et $F_{\acute{e}t}$ désigne le faisceau $a_{\acute{e}t}\phi F$, il existe une unique structure de faisceau étale avec transferts sur $F_{\acute{e}t}$, notée F_{tr} telle que le morphisme $\phi F \longrightarrow F_{\acute{e}t}$ s'étend en un morphisme de préfaisceaux avec transferts $F \longrightarrow F_{tr}$ et tel que F_{tr} représente $\operatorname{Hom}(F, \_) : \mathbf{Shtr}_{\acute{e}t}\left(\mathbf{Sm}(k); \Lambda\right) \longrightarrow \Lambda\text{-}\mathbf{Mod}$.

Démonstration. [MVW06, théorème 6.17] □

En notant $\iota : \mathbf{Shtr}_{\acute{e}t}\left(\mathbf{Sm}(k); \Lambda\right) \longrightarrow \mathbf{PST}(k)$ le foncteur d'oubli, on en déduit:

Corollaire 1.1. Le foncteur ι admet un adjoint à gauche $a_{\acute{e}t}^{tr}$. En particulier la catégorie $\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t}\left(\mathbf{Sm}(k); \Lambda\right)$ est abélienne.

1.3 Les motifs effectifs avec transferts

Le corollaire 1.1 assure que $\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)$ est une catégorie abélienne: on peut considérer sa catégorie dérivée

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)\right).$$

Notons $\mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1}$ la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}\left(\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)\right)$ stable par sommes directes (quelconques) et contenant les complexes à deux termes

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Lambda_{tr}(\mathbf{A}^1 \times U) \longrightarrow \Lambda_{tr}(U) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

pour tout objet U de $\mathbf{Sm}(k)$ et où l'application $\Lambda_{tr}(\mathbf{A}^1 \times U) \longrightarrow \Lambda_{tr}(U)$ est induite par la projection $\mathbf{A}^1 \times U \longrightarrow U$.

Définition 1.7. La catégorie des *motifs effectifs avec transferts*, notée $\mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k;\Lambda)$, est la localisation de Verdier de $\mathbf{D}\left(\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)\right)$ par $\mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1}$

$$\mathbf{DM}^{\text{eff,ét}}(k;\Lambda) \coloneqq \mathbf{D}\left(\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)\right)/\mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1}.$$

1.4 Les motifs non effectifs avec transferts

1.4.1 L_{tr}-spectres avec transferts

Transposons la définition des spectres donnée en cours au cas des faisceaux étales avec transferts.

Pour ce faire, notons que dans $\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)$ on dispose de l'objet

$$L_{tr} \coloneqq \Lambda_{tr}(\mathbf{P}^1_k, \infty_k).$$

Définition 1.8. Un *L_{tr}-spectre* (de faisceaux étales avec transferts) est une paire

$$\mathcal{E} = \left((\mathcal{E}_n)_{n\geq 0}, (\gamma_n)_{n\geq 0}\right)$$

où $\mathcal{E}_n$ est un faisceau étale avec transferts, appelé le *n-ième niveau* du L_{tr}-spectre $\mathcal{E}$ et $\gamma_n : L_{tr} \otimes \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_{n+1}$ est un morphisme de faisceaux, appelé le *n-ième assemblage*.

Définition 1.9. Un morphisme $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ de L_{tr}-spectres est une collection de morphismes de faisceaux $f_n : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}'_n$ tels que $f'_{n+1} \circ \gamma_n = \gamma'_n \circ (id_{L_{tr}} \otimes f'_n)$.

La catégorie ainsi obtenue est abélienne: on la note $\mathbf{Sptr}_{L_{tr}}\left(\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)\right)$.

Proposition 1.1. Pour chaque $p \geq 0$, on a une adjonction

$$\mathrm{Ev_p} \colon \mathbf{Sptr}_{\mathrm{L_{tr}}} (\mathbf{Shtr}_{\text{ét}} (\mathbf{Sm}(\mathrm{k}); \Lambda)) \rightleftarrows \mathbf{Shtr}_{\text{ét}} (\mathbf{Sm}(\mathrm{k}); \Lambda) \ \colon \mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}$$

où $\mathrm{Ev_p} : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}_\mathrm{p}$ envoie un L_{tr}-spectre sur son p-ième niveau et $\mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}$ envoie un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}\mathcal{F}$ défini par

$$\left(\mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}\mathcal{F}\right)_n \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq p-1 \\ L_{tr}^{\otimes n-p} \otimes \mathcal{F} & \text{si } n \geq p \end{cases}$$

avec les morphismes d'assemblages évidents. Le foncteur $\mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}$ est appelé la *suspension infinie* et est noté $\sum_{L_{tr}}^{\infty}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un objet de $\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda)$ et $\mathcal{E}$ un objet de $\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))$.

Soit f un morphisme de L_{tr}-spectres de $\mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{E}$. Il est clair que $f_q = 0$ pour $q < p$. De plus, les conditions de compatibilité de la définition 1.8 assurent que f_q est entièrement déterminé par f_{q-1} pour $q > p$, c'est-à-dire que f_q est entièrement déterminé par $f_p = \mathrm{Ev_p(f)}$, ce qui conclut. □

1.4.2 Définition des motifs non effectifs avec transferts

La catégorie $\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))$ étant abélienne, on peut considérer sa catégorie dérivée $\mathbf{D}\left(\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))\right)$.

Notons $\mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1-\mathrm{st}}$ la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathbf{D}\left(\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))\right)$ stable par sommes directes (quelconques) et contenant les complexes à deux termes

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathbf{A}^1 \times \mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{U}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Sus^{p+1}_{L_{tr}}}\left(\mathrm{L_{tr}} \otimes \Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{U})\right) \longrightarrow \mathrm{Sus^p_{L_{tr}}}\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{U}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

pour tout objet U de $\mathbf{Sm}(k)$ et $p \geq 0$, où la flèche du premier complexe est celle induite par la projection et celle du deuxième est le morphisme de complexes donné par l'identité au-delà de l'indice $p+1$ et l'application nulle strictement en-deçà.

Définition 1.10. La catégorie des *motifs (non effectifs) avec transferts*, notée $\mathbf{DM}^{\text{ét}}(k; \Lambda)$, est la localisation de Verdier de $\mathbf{D}\left(\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))\right)$ par $\mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1-\mathrm{st}}$

$$\mathbf{DM}^{\text{ét}}(k; \Lambda) \coloneqq \mathbf{D}\left(\mathbf{Sptr}_{L_{tr}} (\mathbf{Shtr}_{\acute{e}t} (\mathbf{Sm}(k); \Lambda))\right) / \mathcal{T}^{tr}_{\mathbf{A}^1-\mathrm{st}}.$$

Si X est un objet de $\mathbf{Sm}(k)$ on appelle *motif homogique de X*, noté $M(X)$, l'objet $\sum_{L_{tr}}^{\infty} \Lambda_{tr}(X)$, vu comme objet de $\mathbf{DM}^{\text{ét}}(k;\Lambda)$.

2 Comparaison de motifs avec et sans transferts

Cette section est dédiée à un théorème de comparaison entre les catégories des motifs avec et sans transferts. Après avoir énoncé le théorème de comparaison, on donne des éléments de démonstration pour ramener le cas général au cas où Λ est une $\mathbf{Q}$-algèbre. La première démonstration de ce dernier cas a été trouvée par Morel et requiert des arguments venant de la K-théorie: nous l'admettrons.

2.1 Énoncé du théorème de comparaison

On dispose d'une adjonction

$$a_{tr} \colon \mathbf{Sh}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda) \rightleftarrows \mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda) : o_{tr}$$

où o_{tr} est le foncteur d'oubli et a_{tr} est un foncteur de structures monoïdales caractérisé par la propriété suivante: c'est l'unique foncteur de $\mathbf{Sh}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)$ dans $\mathbf{Shtr}_{ét}(\mathbf{Sm}(k);\Lambda)$ qui préserve les colimites infinies et vérifie

$$a_{tr}\left(\Lambda_{ét}(U)\right) = \Lambda_{tr}(U)$$

pour tout $U \in \mathbf{Sm}(k)$, cette adjonction induit une adjonction au niveau des motifs non effectifs:

$$La_{tr} \colon \mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda) \rightleftarrows \mathbf{DM}^{ét}(k;\Lambda) : Ro_{tr}. \tag{1}$$

Théorème 2.1. L'adjonction (1) est une équivalence de catégories.

La première adjonction fournit également une adjonction au niveau des motifs effectifs

$$La_{tr}^{{}^{r}meff} \colon \mathbf{DA}^{\mathrm{eff},ét}(k;\Lambda) \rightleftarrows \mathbf{DM}^{\mathrm{eff},ét}(k;\Lambda) : Ro_{tr}^{\mathrm{eff}}. \tag{2}$$

On dispose alors du résultat suivant, plus fort que le précédent:

Théorème 2.2. Si Λ est une $\mathbf{Q}$-algèbre, alors (2) est une équivalence de catégories.

Une démonstration détaillée de ce dernier point est donnée dans [Ayo14c, théorème B.1]. On ne s'y intéressera pas ici.

2.2 Canevas de la démonstration dans le cas non effectif

Dans [CD09, §15.2] Cisinski et Déglise ont démontré que le théorème 2.1 est vrai si Λ est une $\mathbf{Q}$-algèbre, en utilisant des idées venant de la K-théorie: nous l'admettons.

Théorème 2.3. Si Λ est une $\mathbf{Q}$-algèbre, l'adjonction (1) est une équivalence de catégories.

Nous admettons également le résultat suivant qui correspond au cas où Λ est une $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$-algèbre pour un entier $N > 0$: ce résultat, démontré dans [Ayo14b, théorème B.2], repose sur le théorème de rigidité relative.

Proposition 2.1. Si Λ est une $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$-algèbre, l'adjonction (1) est une équivalence de catégories.

Le théorème 2.1 est alors un corollaire du théorème 2.2 et de la proposition 2.1, par dévissage. Avant d'entamer la démonstration, rappelons la notion d'engendrement compact d'une catégorie:

Définition 2.1. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée ayant les coproduits (quelconques) et $\mathcal{G}$ une collection d'objets de $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{C}$ est compactement engendrée par $\mathcal{G}$ si:

1. Pour tout objet X, si $\mathcal{T}(G\,[m]\,, X) = 0$ pour tout G dans $\mathcal{G}$ et $m \in \mathbf{Z}$ alors $X = 0$.

2. Pour tout G dans $\mathcal{G}$ et toute famille $\{X_i\}$ d'objets de $\mathcal{T}$, le morphisme canonique

$$\coprod \mathcal{T}(G, X_i) \longrightarrow \mathcal{T}(G, \coprod_i X_i)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par [Ayo14b, proposition 3.19] $\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{L}}\Lambda_{\mathrm{ét}}(\mathrm{X})$ où $p \geq 0$ et X est dans $\mathbf{Sm}(k)$. La même démonstration assure que $\mathbf{DM}^{ét}(k;\Lambda)$ est compactement engendrée par les objets de la forme $\mathrm{Sus}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{L_{tr}}}\Lambda_{\mathrm{tr}}(\mathrm{X})$ pour $p \geq 0$ et X est dans $\mathbf{Sm}(k)$.

• *On commence par se ramener au cas où A est compact et Λ est un sous-anneau de $\boldsymbol{Q}$:*

Le point précédent associé au fait que La_{tr} commute aux sommes directes et au fait que La_{tr} envoie un objet compact sur un objet compact (car $La_{tr}\Lambda_{ét}(X) = \Lambda_{tr}(X)$) assure qu'il est suffisant de montrer que La_{tr} est pleinement fidèle, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda)}(A, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{ét}(k;\Lambda)}(La_{tr}A, La_{tr}M) \tag{3}$$

est une bijection pour tous A, M dans $\mathbf{DA}^{ét}(k; \Lambda)$. Il suffit alors de supposer que A est compact, donc de la forme $A = \mathrm{Sus}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{L}}\Lambda_{\mathrm{ét}}(\mathrm{X})$ et on peut donc supposer que $A = A_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda$ où Λ_0 est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$. Or, on a une adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda)}(A_0 \otimes_{\Lambda_0} \Lambda, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda_0)}(A_0, M)$.

Ces réductions valant également dans $\mathbf{DM}^{ét}(k; \Lambda)$, on en déduit qu'on peut se ramener au cas où $\Lambda = \Lambda_0$.

• *On se ramène ensuite au cas où Λ est une $\boldsymbol{Q}$-algèbre ou une $\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z}$-algèbre pour un certain $N > 0$:*

En considérant le triangle distingué $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}[1]$, il suffit de démontrer que (3) est inversible pour $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Traitons le cas $M \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$. Puisque A est compact, ce cas découle du cas $M \otimes \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ pour $N > 1$: autrement dit, M est la restriction des scalaires de $M' \in \mathbf{DA}^{ét}(k; \Lambda')$ où $\Lambda' := \Lambda/N\Lambda$. L'adjonction $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda)}(A, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{ét}(k;\Lambda')}(A \otimes_\Lambda \Lambda', M)$ permet de se ramener à $\Lambda = \Lambda'$, auquel cas la bijectivité de (2) suit de la proposition 2.1.

Le cas $M \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}$ se traite de façon analogue au précédent avec $\Lambda' := \Lambda \otimes \mathbf{Q}$: on montre qu'on peut remplacer Λ par Λ', auquel cas le résultat suit du théorème 2.2. $\square$

3 Invariance homotopique des faisceaux avec transferts et calcul du groupe des morphismes entre motifs

3.1 Invariance homotopique des préfaisceaux avec transferts

Définition 3.1. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur $\mathbf{Sm}(k)$, on dit que $\mathcal{F}$ est *invariant par homotopie* si pour tout objet U de $\mathbf{Sm}(k)$, le morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbf{A}^1 \times U)$ est un isomorphisme.

Rappelons la définition suivante donnée en cours:

Définition 3.2. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur $\mathbf{Sm}(k)$, on dit que $\mathcal{F}$ est $\boldsymbol{A}^1$*-local* si pour tout objet U de $\mathbf{Sm}(k)$ et $i \geq 0$ le morphisme

$$H^i_{\text{ét}}(U; a_{\text{ét}}\mathcal{F}) \longrightarrow H^i_{\text{ét}}(\mathbf{A}^1 \times U; a_{\text{ét}}\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Les préfaisceaux invariants par homotopie jouissent de la propriété suivante:

Théorème 3.1. Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau avec transferts qui est invariant par homotopie, alors $a^{\text{tr}}_{\text{ét}}\mathcal{F}$ est $\mathbf{A}^1$-local.

Nous avions évoqué en cours l'existence d'un endofoncteur $\text{Loc}_{\mathbf{A}^1}$ de $\mathbf{D}(\mathbf{Sh}_{\text{ét}}(k; \Lambda))$. L'intérêt du théorème précédent est qu'il permet de décrire $\text{Loc}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{K})$ dès que $\mathcal{K}$ est un complexe de faisceaux étales avec transferts.

Définition 3.3. Si $n \geq 0$, on pose

$$\Delta^n \coloneqq \text{Spec}(\mathbf{Z}\,[t, 0, \ldots, t_n]\,/(t_0 + \cdots + t_n - 1))$$

et $\delta_i : \Delta^n \longrightarrow \Delta^{n+1}$ qui envoie $(t_0, \ldots, t_n)$ sur $(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n)$. Étant donné un complexe de préfaisceaux avec transferts $\mathcal{K}$, on définit

$$\text{Sing}^{\mathbf{A}^1}(\mathcal{K}) \coloneqq \text{Tot}\,\underline{\text{Hom}}(\Delta^\bullet, \mathcal{K})$$

où $\underline{\text{Hom}}(\Delta^n, \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\Delta^n \times U)$ pour tout préfaisceau $\mathcal{F}$ et schéma lisse U.

À l'aide du théorème 3.1, Suslin et Voevodsky ont démontré dans [VSF00] le résultat suivant:

Théorème 3.2. Si $\mathcal{K}$ est un complexe de faisceaux étales avec transferts, alors $\text{Loc}_{\mathbf{A}^1}(\mathcal{K}) = \text{Sing}^{\mathbf{A}^1}(\mathcal{K})$.

3.2 Groupe des morphismes entre motifs

Ce paragraphe donne une réponse partielle dans le cas de motifs particuliers:

Question. *Étant donnés deux objets $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de $\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\Lambda)$, que dire du groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DA}^{\text{ét}}(k,\Lambda)}(\mathcal{M},\mathcal{N})$*?*

Commençons par définir une classe de motifs avec transferts qui apparaissent dans la suite:

Définition 3.4. Si $p \geq 0$, on pose

$$\Lambda_{tr}(p) := \Sigma^{\infty}_{L_{tr}}\left(L^{\otimes p}\right)[-2p]\,.$$

Le théorème suivant est alors dû à Voevodski:

Théorème 3.3. Si X est une k-variété lisse et $p,q \geq 0$, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{ét}(k;\Lambda)}(M(X);\Lambda(q)[p]) \simeq H^{2p-q}_{ét}\left(X;\mathrm{Sing}^{\mathbf{A}^1}\Lambda_{tr}\left(\mathbf{P}^1_k,\infty_k\right)^{\wedge q}\right)$$

où le terme de droite est l'hypercohomologie étale de X à valeurs dans le complexe de faisceaux étales $\mathrm{Sing}^{\mathbf{A}^1}\Lambda_{tr}\left(\mathbf{P}^1_k,\infty_k\right)^{\wedge q}$.

4 Références

[And04] Yves André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Ayo14a] Joseph Ayoub. A guide to (étale) motivic sheaves. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*, pages 1101–1124. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[Ayo14b] Joseph Ayoub. La réalisation étale et les opérations de Grothendieck. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 47(1):1–145, 2014.

[Ayo14c] Joseph Ayoub. L'algèbre de Hopf et le groupe de Galois motiviques d'un corps de caractéristique nulle, I. *J. Reine Angew. Math.*, 693:1–149, 2014.

[CD09] Denis-Charles Cisinski and Frédéric Déglise. Triangulated categories of mixed motives, 2009.

[MVW06] Carlo Mazza, Vladimir Voevodsky, and Charles Weibel. *Lecture notes on motivic cohomology*, volume 2 of *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[VSF00] Vladimir Voevodsky, Andrei Suslin, and Eric M. Friedlander. *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, volume 143 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000.