École Normale Supérieure
16 octobre 2018

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$4

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$. On définit le graphe de f par :

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \text{ tq } x \in X\} \subset X \times Y.$$

a) Montrer que, si Y est séparé, le graphe de f est fermé dans $X \times Y$ pour la topologie produit si f est continue.
b) Montrer que, si Y est compact, f est continue si $\mathcal{G}(f)$ est fermé.
c) Donner un contre-exemple à la propriété précédente dans le cas où Y n'est pas compact.

2. Soit X un ensemble. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X telles que X est compact pour $\mathcal{T}_2$ et séparé pour $\mathcal{T}_1$. Montrer que si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3. [**Topologie quotient**]
Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$.
On note $\pi : x \in X \to [x] \in Y$ l'application qui à un élément de X associe sa classe d'équivalence.
On dit que $U \subset Y$ est un ouvert si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.
a) Montrer que ceci définit bien une topologie sur Y.
b) Soit Z un espace topologique. Montrer qu'une application $f : Y \to Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \to Z$ est continue.

4. Soit $f : K \to L$ une bijection continue entre compacts, montrer que c'est un homéomorphisme.

5. [**théorème du point fixe**] Soit (K, d) un espace métrique compact et f une application continue faiblement contractante ($d(f(x), f(y)) < d(x, y)$). Montrer que f admet un unique point fixe et que pour tout point la suite des itérés converge vers ce point fixe.

6. [**lemme du tube**] Soit X un espace et Y un espace compact. Soit $x \in X$, montrer que tout ouvert V contenant $\{x\} \times Y$ contient un ouvert de la forme $U \times Y$ contenant également ce dernier.

Exercice 2 : les compacts sont normaux

Soit X un espace topologique compact.

1. Montrer que X est *régulier* : pour tout fermé $F \subset X$ et tout $x \in X - F$, il existe deux ouverts disjoints de X, U et V, tels que $F \subset U$ et $x \in V$.

2. Montrer que X est *normal* : pour tous fermés disjoints, F_1 et F_2, il existe U_1 et U_2 des ouverts disjoints tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.

3. Montrer de même que dans un espace topologique il est possible de séparer deux compacts par des ouverts.

Exercice 3 : sur les expansions

Soit X un espace métrique compact et f une application expansive :

$$\forall x, y \; d(f(x), f(y)) \geq d(x, y).$$

On note f^n l'itérée n fois de f.

1. Soit $x, y \in X$, montrer qu'il existe une extraction φ telle que les suites $\left(f^{\varphi(n)}(x)\right)$ et $\left(f^{\varphi(n)}(y)\right)$ soient de Cauchy. En déduire que

   (i) $\forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{N}^* \; d(f^p(x), x) < \epsilon, \; d(f^p(y), y) < \epsilon$.

   (ii) f est une isométrie de X dans X.

2. Montrer que f est une isométrie de X sur X, i.e. f surjective.

3. Soit maintenant f une contraction $(d(f(x), f(y)) \leq d(x, y))$ surjective. Montrer l'existence d'une expansion g telle que $f \circ g = \mathrm{id}_X$ et en déduire que f est une isométrie.

Exercice 4 : sur la propreté

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une bijection continue tendant vers l'infini en l'infini. Montrer que c'est un homéomorphisme. (deux preuves sont possibles, l'une plus courte que l'autre.)

Exercice 5 : compactification d'Alexandrov

Soit X un espace topologique localement compact. On pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On dit que $U \subset \hat{X}$ est un ouvert de $\hat{X}$ si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

1. $U \subset X$ et U est un ouvert de X.
2. $\infty \in U$ et $\hat{X} - U \subset X$ est un compact de X.

On note $i : X \to \hat{X}$ l'application qui à $x \in X$ associe $i(x) = x \in \hat{X}$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une topologie sur $\hat{X}$.

2. Montrer que $\hat{X}$ est compact pour cette topologie.

3. Montrer que i est un homéomorphisme sur son image.

4. Montrer qu'à homéomorphisme près, $\hat{X}$ est le seul espace topologique vérifiant les propriétés suivantes :

   (i) $\hat{X}$ est compact ;

   (ii) Il existe $i : X \to \hat{X}$ une application réalisant un homéomorphisme sur son image telle que $\hat{X} - i(X)$ est de cardinal 1.

Exercice 6 : trois compactifications du plan euclidien

On appelle *compactification* d'un espace topologique X la donnée d'un espace topologique compact Y et d'une application continue $i : X \to Y$ telles que :

- $i(X)$ est dense dans Y ;
- i réalise un homéomorphisme de X vers $i(X)$.

Le but de cet exercice est de présenter trois compactifications différentes de $\mathbb{R}^2$, muni de sa topologie usuelle.

1. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. On appelle *pôle nord* le point $N = (0, 0, 1)$. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to S^2$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le point $P \in S^2 - \{N\}$ tel que la droite de $\mathbb{R}^3$ reliant P au pôle Nord passe par $(x, y, 0)$.
a) Montrer que (S^2, i) est une compactification de $\mathbb{R}^2$ et qu'elle est homéomorphe à la compactification d'Alexandrov définie dans l'exercice précédent.
b) À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le pôle Nord ?

2. Soit $S^2_+ = \{(x, y, z) \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}$.
Soit $i : \mathbb{R}^2 \to S^2_+$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le point de S^2_+ appartenant à la droite de $\mathbb{R}^3$ reliant $(x, y, 1)$ et $(0, 0, 0)$.
a) Montrer que (S^2_+, i) est une compactification de $\mathbb{R}^2$.
b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers le point $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ de S^+_+ ?

3. [Digression sur le plan projectif]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par :

$$x \sim x' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}^* \text{ tq } x = rx'.$$

On note $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/ \sim$, muni de la topologie quotient (définie à la question 3 de l'exercice 1).
a) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $S^n/ \sim_S$, où S^n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $x \sim_S x'$ si et seulement si $x = \pm x'$.
b) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est compact.

4. Soit $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $[(x, y, 1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), i)$ est une compactification.
b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. À quelle condition une suite $i(x_n, y_n)$ converge-t-elle vers $[(\cos\theta, \sin\theta, 0)]$?

Exercice 7 : compacité et compacité séquentielle

Un espace X est dit *séquentiellement compact* si de toute suite dans X, on peut extraire une sous-suite convergente.

1. Donner un exemple d'espace compact, non séquentiellement compact. Remarquer toutefois que dans un espace compact, toute suite admet une valeur d'adhérence. (On pourra considérer $\{0; 1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ et la suite définie par $u^{(n)} = \left(1_E(n)\right)_{E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$)

2. Donner un exemple d'espace séquentiellement compact, non compact.
[Indication : Munir le premier ordinal non dénombrable ω_1 de la topologie de l'ordre.]

Exercice 8 : Ensemble de Cantor, super-compact

1. On définit par récurrence la suite de compacts K_n par $K_0 = [0; 1]$ puis K_{n+1} obtenu à partir de K_n en ôtant le tiers central de chacun des segments qui composent K_n. On considère l'ensemble de Cantor triadique $C := \bigcap K_n$. Montrer que c'est un compact.

2. On considère maintenant $K := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Montrer que c'est un espace compact homéomorphe à C. (Penser au développement en base 3) Finalement, on notera $K = C$.

3. On va montrer que pour tout compact K il existe une surjection continue $f : C \to K$. Soit K un compact. a) Montrer l'existence d'une famille de parties $\mathcal{A}(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in \{0;1\}^n$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait

- $K = \mathcal{A}(\emptyset)$
- Si $\varepsilon \in \{0;1\}$, on a $\mathcal{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathcal{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0) \cup \mathcal{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1)$
- Si $\varepsilon \in \{0;1\}^{\mathbb{N}^*}$, alors $\mathsf{diam}\mathcal{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{A}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \neq \emptyset.$$

b) Conclure en construisant une surjection de C sur K.

Exercice 9 : théorème de Kuratowski

On dit qu'une application continue f est fermée si l'image d'un fermé est également fermé.

1. Montrer que si X est un espace métrique compact, alors pour espace métrique Y, la projection $X \times Y \to Y$ est fermée.

2. Montrer que la propriété subsiste si l'on ne suppose plus que l'on a affaire à des espaces métriques.

3. Soit X un espace séparé tel que pour tout espace Y la projection soit fermée, on va montrer que X est compact. Soit (U_i) un recouvrement de X par des ouverts. a) On pose $Y := X \sqcup \{\infty\}$. Montrer que l'ensemble des parties ne contenant pas ∞ et les complémentaires des unions finies d'ouverts du recouvrement auxquelles on rajoute ∞ forment une base de topologie de Y. b) Soit $\overline{\Delta}$ l'adhérence de la diagonale de X dans $X \times Y$. Montrer que $\pi_Y(\overline{\Delta}) = X \subset Y$. c) Conclure que $\{\infty\}$ est ouvert et que X est compact.

Exercice 10 : Théorème de Dini

Soit X un espace topologique compact et (f_n) une suite ponctuellement décroissante de fonctions continue à valeurs réelles convergeant simplement vers une limite f également continue. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 11 : théorème de Riesz

Montrer qu'un espace vectoriel réel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte. (Raisonner par contraposée en construisant une suite dont les termes sont éloignés les uns des autres.)

Exercice 12 : "L'ensemble des compacts d'un compact est compact."

Soit (X, d) un espace métrique compact. On rappelle que l'on peut munir l'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des parties compactes de X d'une distance δ appelée distance de Hausdorff. Celle-ci est définie par

$$\delta(K_1, K_2) = \|d_{K_1} - d_{K_2}\|_\infty$$

où $d_{K_1}(x) := \inf_{k\in K_1} d(x,k)$ est la fonction distance à K_1. On rappelle qu'elle est égale à

$$\delta(K_1,K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ t.q. } K_1 \subset V_\varepsilon(K_2) \text{ et } K_2 \subset V_\varepsilon(K_1)\}$$

où $V_\varepsilon(K) = \bigcup_{x\in K} \overline{\mathcal{B}}(x,\varepsilon)$ désigne l'ensemble des points à distance au plus ε de K. On admet que la distance de Hausdorff est bien une distance et que les deux définitions sont bien équivalentes. On utilisera surtout la seconde. On va montrer que $\mathcal{K}(X)$ est lui-même compact pour la topologie induite par δ.

1. a) Soit $K_n \to K$ une suite convergente, $x_n \in K_n$ un élément pris dans chaque K_n, et x une valeur d'adhérence de (x_n). Montrer que $x \in K$.
b) Soit toujours $K_n \to K$ une suite convergente, et soit $x \in K$, montrer que pour tout voisinage V de x, la suite $(K_n \cap V)$ est ultimement non vide. (i.e. non vide à partir d'un certain rang.)

Soit (K_n) une suite de compacts pas nécessairement convergente. On rappelle que la topologie de X est à base dénombrable d'ouverts, et on se donne une base de topologie (U_m).

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(K_{\varphi(n)})$ telle que pour tout m la suite $(K_{\varphi(n)} \cap U_m)_n$ est soit constituée d'ensembles non vides à partir d'un certain rang, soit stationnaire à $\emptyset$. (on pourra montrer qu'il existe une suite d'extractrices (φ_m) telle que pour tout m la suite $\big(K_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)} \cap U_m\big)_n$ est ultimement vide ou ultimement non vide, puis poser $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$.)
3. On pose

$$L := \{x \in X \ : \ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap K_{\varphi(n)} \neq \emptyset \text{ à partir d'un certain rang.}\}.$$

Montrer que L est compact.
4. On va montrer que la suite $K_{\varphi(n)}$ converge vers L. Soit $\varepsilon > 0$.
a) Montrer que l'on peut trouver un ensemble fini $M \subset \mathbb{N}$ tel que

$$L \subset \bigcup_{m\in M} U_m \subset V_\varepsilon(L) \text{ et } \forall m \in M,\ U_m \cap L \neq \emptyset \text{ et diam } U_m \leqslant \varepsilon.$$

On note $U := \bigcup_{m\in M} U_m$, qui est ouvert.
b) Montrer qu'il existe $r < \varepsilon$ tel que $V_r(L) \subset U$.
c) Montrer que l'on peut trouver un ensemble fini $N \subset \mathbb{N}$ tel que

$$X - U \subset \bigcup_{m\in N} U_m \subset X - V_r(L).$$

d) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $K_{\varphi(n)} \cap U_m = \emptyset$ si $m \in N$ et est non vide si $m \in M$.
e) Conclure que $K_{\varphi(n)} \to L$.