École Normale Supérieure
12 Décembre 2017

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$11

Exercice 1 : questions diverses

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq \alpha ||x - y||.$$

Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même.

2. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on définit l'inverse de $x \neq 0$ par $f(x) := \frac{x}{\|x\|^2}$.

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

b) Interpréter géométriquement la différentielle en considérant la réflexion orthogonale d'axe x, en déduire que l'inversion conserve les angles.

3. Soit $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et soit $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

a) Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n$.

b) On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{S}_n^{++}$, il existe une et une seule $B \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $B^2 = A$. On note $\sqrt{A} := B$. Montrer que l'application $A \in \mathcal{S}_n^{++} \to \sqrt{A} \in \mathcal{S}_n^{++}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

4. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

a) Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, ..., \lambda_n : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que tout polynôme $P \in V$ a n racines distinctes, notées $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$. (penser aux fonction implicites)

b) Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $d\lambda_i(P)$ en fonction de $\lambda_1(P), ..., \lambda_n(P)$.

Exercice 2 : Matrice jacobienne et symétrie

1. Soit f une application $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Montrer que la jacobienne est antisymétrique en tout point si et seulement si f est affine et antisymétrique.

2. Soit f une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Montrer que la jacobienne est symétrique si et seulement s'il existe une application φ $\mathcal{C}^2$ telle que $f_i(x) = \partial_i \varphi(x)$. (on pourra considérer $\varphi(x) := \sum x_i \int_0^1 f_i(tx)\mathrm{d}t$.)

Exercice 3 : théorème des fonctions implicites

On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation

$$\sin(y) + y + e^x = 1.$$

Montrer qu'au voisinage de l'origine, y s'écrit comme une fonction de x de classe $\mathcal{C}^\infty$; donner un développement limité à l'ordre 3 de cette fonction.

Exercice 4 : sur la Hessienne d'une fonction

Soit f une application $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit ϕ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer la Hessienne de $f \circ \phi$ en le point x, en fonction des dérivées premières et de la Hessienne de f en $\phi(x)$ et des dérivées première et seconde de ϕ en x.

2. En déduire que, en un point critique x de f, la signature de la Hessienne de f en x est égale à la signature de la Hessienne de $f \circ \phi$ en $\phi^{-1}(x)$.

3. Montrer qu'on ne peut pas enlever l'hypothèse sur le point x.

Exercice 5 : un théorème de Whitney

Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Un théorème de Whitney établit que F est le lieu des zéros d'une fonctions réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $F = f^{-1}(\{0\})$.

1. Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et d'applications $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que $F = \mathbb{R}^n - \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } f_i(x) = 0\} = \mathbb{R}^n - B_i.$$

2. Construire l'application recherchée à partir des f_i.

Exercice 6 : Théorème de la boule chevelue

On va démontrer le théorème dit de la boule chevelue : toute application continue $\alpha : S^{2p} \to \mathbb{R}^{2p+1}$ vérifiant $\alpha(x) \cdot x = 0$ s'annule en au moins un point.

1. Commencer par constater que le théorème est faux pour les sphères de dimension impaire et qu'il existe bien dans ce cas un champ de vecteur tangents qui ne s'annule pas.

2. On revient au cas que l'on veut montrer et on suppose par l'absurde qu'il existe un champ de vecteurs $\alpha : S^{2p} \to \mathbb{R}^{2p+1}$ continue qui ne s'annule pas.
a) Montrer que l'on peut étendre α en u continue définie sur la couronne $\mathcal{O}(a,b) := \{a \leq \|x\| \leq b\}$ par $u(x) := \|x\|\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Constater alors que l'on a toujours $u(x) \cdot x = 0$, u ne s'annule pas, et $\|u(x)\| = \|x\|$.
b) Montrer que l'on peut supposer u $\mathcal{C}^1$ en conservant les trois propriétés précédentes.

3. On se donne dans cette question un champ de vecteur $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas et définit sur la couronne $\mathcal{O}(a,b)$.
a) Montrer que pour t assez petit l'application $f_t(x) := x + tv(x)$ est injective. (penser au théorème des accroissements finis pour v)
b) Montrer que sa différentielle est bijective. (penser à l'inversion locale)
c) Montrer que le volume de son image $f_t(\mathcal{O}(a,b))$ est un polynôme en t.

4. On considère maintenant le champ de vecteur donné par la seconde question. Montrer que l'application $f_t(x) := x + tu(x)$ réalise un difféomorphisme de la couronne $\mathcal{O}(a,b)$ sur $\sqrt{1+t^2}\mathcal{O}(a,b)$ et conclure.

Exercice 7 : lemme de Morse

1. [Lemme de réduction régulière des formes quadratiques]

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques réelles de taille n. Fixons $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit :

$$\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to {}^tMA_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

a) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle en Id.
b) Montrer que $d\phi(\mathrm{Id})$ est surjective.
c) Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $P : \mathcal{V} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

1. $P(A_0) = \mathrm{Id}$
2. $\forall A \in \mathcal{V}, A = {}^tP(A)A_0P(A)$

2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0, df(0) = 0$ et $d^{(2)}f(0)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
a) Montrer qu'il existe un voisinage de 0, $V \subset U$ et $(a_{i,j})_{i,j \leq n}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de V vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) = x \in V, \qquad f(x) = \sum_{i,j \leq n} a_{i,j}(x) x_i x_j.$$

[Indication : utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.]
b) Montrer qu'il existe V_1, V_2 deux voisinages de 0 inclus dans U et $\phi : V_1 \to V_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tels que $\phi(0) = 0$ et :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in V_1, \quad f(\phi(x_1, ..., x_n)) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_n^2.$$

Exercice 8 : formes normales

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts contenant 0.
Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
1. On suppose que $df(0)$ est injective.
Montrer que $n \leq m$ puis montrer qu'il existe un voisinage $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ de 0, un voisinage $V_0 \subset V$ de 0 contenant $f(U_0)$, un voisinage $W_0 \subset \mathbb{R}^m$ de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : V_0 \to W_0$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad \phi \circ f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0).$$

[Indication : se ramener au cas où $df(0).e_i = e_i$ pour tout $i \leq n$ (où les e_i désignent les vecteurs de la base canonique) puis considérer l'application Γ, définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, telle que $\Gamma(x_1, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_n) + (0, ..., 0, x_{n+1}, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$.]
2. On suppose que $df(0)$ est surjective.
Montrer que $n \geq m$ puis montrer qu'il existe des voisinages $U_0, U_1 \subset \mathbb{R}^n$ de 0 et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\psi : U_0 \to U_1$ tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_m).$$

Exercice 9 : théorème du rang constant

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts contenant 0.
Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
On suppose que l'application $\operatorname{rang} df$ admet un maximum local en 0 et on pose $r = \operatorname{rang} df(0)$.
a) Montrer que, pour tout x assez proche de 0, $\operatorname{rang} df(x) = r$.
b) Montrer qu'il existe $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset U$ deux voisinages ouverts de 0, $\psi : U_1 \to U_2$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ un isomorphisme linéaire et $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_m : U_1 \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U_1, \quad A \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, \lambda_{r+1}(x), ..., \lambda_m(x))$$

[Indication : utiliser la question 2 de l'exercice sur les formes normales.]
c) Montrer que, quitte à prendre U_1 et U_2 plus petits, on peut supposer que :

$$\forall k = r+1, ..., m, \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in U_1, \quad \lambda_k(x_1, ..., x_n) = \lambda_k(x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

d) Montrer qu'il existe $U_0 \subset \mathbb{R}^n, U_0' \subset U, V_0 \subset V, V_0' \subset \mathbb{R}^m$ des voisinages ouverts de 0 et $\psi : U_0 \to U_0', \phi : V_0 \to V_0'$ des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in U_0, \quad \phi \circ f \circ \psi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$$

[Indication : utiliser la question 1 de l'exercice sur les formes normales.]
2. [Exemple 1] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, x^2)$. Donner un exemple de $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes ϕ, ψ, définis au voisinage de $(0, 0)$, tels que :

1. $\psi \circ f \circ \phi(a, b) = (a, 0)$ pour tout (a, b) assez proche de $(0, 0)$.
2. $\psi(0, 0) = (0, 0)$ et $\phi(0, 0) = (0, 0)$

3. [Exemple 2] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que $f(x, y) = (x, y^2)$. Montrer qu'il n'existe pas ϕ et ψ comme dans la question précédente.
4. [Application] Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V non-vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que $df(x)$ est injective sur un ouvert dense de V.