

Notes de topologie algébrique

Thomas Blomme

2 août 2023

Table des matières

1	Rappels de topologie et constructions	3
2	Homotopies et équivalences d'homotopie	5
3	Chemins et groupe fondamental	8
4	Théorème de Van Kampen	11
5	Applications de Van Kampen	14
6	Revêtements	16
7	Classification des revêtements	20
8	Introduction à l'homologie : les Δ-complexes et leur homologie	25
9	Théorie homologique : catégories et manipulation de complexes	28
10	Homologie Singulière, définitions et premières propriétés	31
11	Excision et Équivalence entre les différentes théories homologiques	34
12	L'Homologie en action	36
13	Degré d'une application et homologie cellulaire	38

Introduction

Le cours se propose d'introduire différents outils de *topologie algébrique*, qui permettent d'aborder plusieurs concepts topologiques et géométriques du point de vue algébrique, ce qui permet de visualiser certains objets d'un point de vue calculatoire, et de formuler proprement certaines obstructions. Le cours se découpe en trois grandes parties.

- * Dans une première partie, on définit la notion principale d'*homotopie*, qui est une relation d'équivalence plus faible que l'homéomorphie pour les espaces topologiques. On définit ensuite le groupe fondamental d'un espace pointé $\pi_1(X, x)$, ce qui permet de définir un premier invariant d'homotopie. Il permet déjà plusieurs applications. comme par exemple le théorème de Brouwer en dimension 2 ou de Borsuk-Ulam.
- * Dans une second partie plus courte, on exploite le groupe fondamental afin de classifier les revêtements d'un espace, ce qui illustre la puissance des outils introduits : il est possible de classifier les revêtements uniquement à partir du groupe fondamental.
- * La dernière partie est dévolue à un type différent d'invariants homotopiques : les groupes d'homologie. L'idée qui les motive est assez naturelle. Cependant, le coût technique nécessaire à leur introduction est assez important. On espère que les applications proposées et la facilité de manipulation et calcul qu'ils possèdent suffira à motiver leur introduction : théorème de Jordan, théorème de Brouwer, théorème de la boule chevelue.

1 Rappels de topologie et constructions

1.1 Espaces topologiques

On appellera *espace* un ensemble muni d'une topologie. Sauf mention du contraire, tous les espaces seront *séparés*. Deux espaces sont homéomorphes s'il existe une bijection continue d'inverse continue.

Définition 1.1. On appelle espace pointé la donnée (X, x) avec $x \in X$. Une application entre espaces pointés $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est une application continue telle que $f(x) = y$.

Définition 1.2. On appelle paire d'espace une paire (X, A) avec $A \subset X$. Une application entre paire d'espaces $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application continue telle que $f(A) \subset B$.

1.2 Compacité

On rappelle qu'un espace est compact si tout recouvrement par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. On a le critère suivant d'homéomorphie dans le cas des espaces compacts.

Proposition 1.3. Si $X \rightarrow Y$ est une bijection continue, X est compact et Y est séparé, alors c'est un homéomorphisme.

De plus, les espaces métriques compacts vérifient la propriété dite de Lebesgue : si $\mathcal{U}$ est un recouvrement par des ouverts, il existe $\varepsilon > 0$ telle que toute partie de diamètre au plus ε est contenue dans l'un des ouverts du recouvrement.

Définition 1.4. Une *variété topologique* de dimension n est un espace séparé dont tout point admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.5. les boules, la sphère, les recollements de polygones. ◇

1.3 Connexité

On dit que deux points x et y sont *reliables* s'il existe un chemin $\gamma : x \rightsquigarrow y$. C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées *composantes connexes par arcs*. On dit qu'un espace est connexe par arcs si tout point est fiable à un autre par un chemin : il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

Remarque 1.6. C'est suffisant pour montrer que certains espaces sont pas homéomorphes. ◆

On dit qu'un espace X est connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X . Un espace connexe par arcs est connexe mais la réciproque est fausse.

1.4 Espaces quotients

Définition 1.7. Topologie quotient : si X est un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation, l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ est muni d'une topologie naturelle : U est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert.

Proposition 1.8. Si $f : X \rightarrow Y$ est invariante par $\mathcal{R}$, il existe une unique application quotient $\tilde{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$.

Exemple 1.9. Recollement de polygones. ◇

On appelle écrasement de $A \subset X$ le quotient par la relation $x \sim y$ si $x, y \in A$ et $x \sim x$ sinon.

Exemple 1.10. — Écraser le bord de la boule donne la sphère.

- Bouquet d'espaces en identifiant les points de bases.
- On appelle cône de X le quotient $X \times I / X \times \{0\}$.
- On appelle suspension de X l'espace quotient $X \times I / (X \times \{0\}, X \times \{1\})$. La suspension de la sphère S^n est S^{n+1} . ◇

1.4.1 Action de groupe sur un ensemble

Une action de groupe est une application continue $G \times X \rightarrow X$ telle que $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. On a une application quotient $X \rightarrow X/G$.

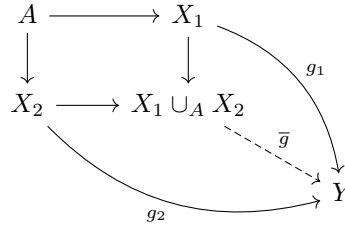
Exemple 1.11. * $\mathbb{Z}$ agit par translations sur $\mathbb{R}$.

* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par antipodie sur S^n .

◇

1.4.2 Recollement d'espaces

Soient X_1, X_2 deux espaces, et $f_1 : A \rightarrow X_1$, $f_2 : A \rightarrow X_2$ deux applications continues. On appelle recollement de X_1 et X_2 le long de K le quotient $X_1 \sqcup X_2 / \sim$ où la relation est engendrée par $f_1(a) \sim f_2(a)$. Il est noté $X_1 \cup_A X_2$. Le recollement vérifie la propriété universelle suivante :



Dans le cas particulier de $A = S^{n-1}$ et $X_2 = D^n$, on parle du recollement d'une n -cellule.

Exemple 1.12. $\mathbb{R}P^n$ s'obtient à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ par recollement d'une $n - 1$ -cellule.

◇

2 Homotopies et équivalences d'homotopie

On commence par introduire la notion d'homotopie entre espaces, qui est plus faible que la notion d'homéomorphie.

2.1 Homotopies entre fonctions

Définition 2.1. Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une *homotopie* $H : X \times I \rightarrow Y$.

Proposition 2.2. La relation “être homotope à” est une relation d'équivalence.

Remarque 2.3. On a aussi la notion d'homotopie relative à $A \subset X$ pour les fonctions qui coïncident sur A . ♦

Proposition 2.4. La relation “être homotope à” est compatible avec la composition : si $f \sim g$ et $f' \sim g'$, alors $f \circ f' \sim g \circ g'$.

Exemple 2.5. Toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sont homotopes : si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, il suffit de poser

$$H_t(x) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$
♦

2.2 Type d'homotopie d'un espace

Définition 2.6. On dit que X et Y sont des espaces homotopes s'il existe des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. On les appelle des *équivalences d'homotopie*.

Proposition 2.7. La relation “être homotope à” est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques. Deux espaces homéomorphes sont homotopes.

Définition 2.8. Un espace est *contractile* s'il est homotope à un singleton. De manière équivalente, l'identité est homotope à une application constante.

Exemple 2.9. * Une couronne est homotope à un cercle.

* L'espace épointé est homotope à la sphère.

* Un graphe est homotope à un bouquet de cercles en contractant des arêtes.

* La sphère avec une corde est homotope au bouquet d'une sphère et d'un cercle. ♦

2.3 Rétractions par déformation

On donne maintenant une famille particulière d'équivalences d'homotopie fournies par certaines inclusions.

Définition 2.10. Soit X un espace topologique. On dit que $A \subset X$ est un rétracte de X par déformation s'il existe $r : X \times I \rightarrow X$ telle que

(i) $r_0(x) = x$,

(ii) $r_1(x) \in A$,

(iii) $r_t(a) = a$.

Proposition 2.11. *Si A est un rétracte par déformation de X , ils ont même type d'homotopie.*

Exemple 2.12. * La sphère dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est un rétracte par déformation.

* Un convexe, ou plus généralement un ensemble étoilé se rétracte sur un point.

* $[-1; 1]^2$ se rétracte sur $[-1; 1] \times \{\pm 1\} \cup \{0\} \times [-1; 1]$.

◇

2.4 Construction d'équivalences d'homotopie

On donne dans cette section une manière de construire de nombreuses équivalences d'homotopies. Elle s'appuie sur la notion suivante :

Définition 2.13. Soit $A \subset X$ une paire d'espace. On dit que c'est une *cofibration* si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Pour tout espace Z et toute application continue $f : A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow Z$, il existe une extension continue à $X \times I$. ($I = [0; 1]$)
- (ii) Il existe une rétraction $r : X \times I \rightarrow A \times I \cup X \times \{0\}$.

Démonstration. Pour (i)⇒(ii), il suffit de prendre $Z = A \times I \cup X \times \{0\}$ (qui a la forme d'un chapeau) et prolonger l'identité. Pour (ii)⇒(i), il suffit de composer avec la rétraction. □

Remarque 2.14. Il est possible de montrer que A est nécessairement fermé dans X . ◆

Énonçons maintenant le principal résultat :

Théorème 2.15. *Soit $A \subset X$ une cofibration telle que A est un espace contractile. Alors la projection $X \rightarrow X/A$ est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. Il s'agit de trouver un inverse homotopique à la projection canonique. Soit $h : A \times I \rightarrow A$ une homotopie entre id_A et une application constante, qui existe car A est contractile. On la recolle avec id_X pour obtenir une application

$$f : A \times I \cup X \times \{0\} \rightarrow X,$$

qui est bien continue car elle est continue sur $A \times I$ et sur $X \times \{0\}$ qui sont deux parties fermées. Il est donc possible de trouver un prolongement en $\hat{f} : X \times I \rightarrow X$ qui satisfait $\hat{f}_0 = \text{id}_X$ et $\hat{f}_1|_A$ est constante. On obtient donc une application $g = \hat{f}_1 : X/A \rightarrow X$ qui vérifie $f_1 = g \circ \pi$. Cette dernière est l'inverse homotopique recherché. En effet, en notant $\pi : X \rightarrow X/A$, on a d'une part $g \circ \pi = f_1 \sim f_0 = \text{id}_X$. Pour l'autre sens, la composition $\pi \circ \hat{f} : X \times I \rightarrow X/A$ est constante égale à $[A]$ sur chacun des $A \times \{t\}$, de sorte qu'elle induit une application $X/A \times I \rightarrow X/A$ qui est une homotopie entre $\text{id}_{X/A}$ et $\pi \circ g$. □

Pour pouvoir utiliser ce critère, il convient de pouvoir détecter les cofibrations, ce pourquoi on donne l'outil suivant.

Proposition 2.16. *Soit X un espace métrique et $A \subset X$ une partie fermée. On suppose qu'il existe un voisinage U de A qui se rétracte par déformation sur A . Alors l'inclusion $A \subset X$ est une cofibration.*

Démonstration. Comme on est dans un espace métrique, il est possible de séparer les fermés A et $X - U$, ce que l'on s'empresse de faire : soit $u : X \rightarrow I$ une fonction continue qui vaut 0 sur A et 1 sur $X - U$. Celle-ci est donnée par $\frac{d(-, A)}{d(-, A) + d(-, X - U)}$, de sorte que l'on peut supposer que $U = u^{-1}([0, 1])$. Soit $H : U \times I \rightarrow U \subset X$

la rétraction par déformation. On définit alors une rétraction $r : X \times I \rightarrow A \times I \cup X \times \{0\}$ par la formule suivante :

$$r(x, t) = \begin{cases} (x, t) & \text{si } u(x) = 0, \\ (H(x, t/2u(x)), 0) & \text{si } u(x) \neq 0 \text{ et } t \leq 2u(x) \leq 1, \\ (H(x, 1), t - 2u(x)) & \text{si } 2u(x) \leq t < 1, \\ (H(x, 2(1 - u(x))t), 0) & \text{si } u(x) \in [1/2; 1[\\ (x, 0) & \text{si } u(x) = 1. \end{cases}$$

Cette application est bien définie et continue. (Faire un dessin) □

Exemple 2.17. On peut utiliser les propositions ci-dessus pour contracter par exemple :

- * un arbre couvrant dans un graphe,
- * sur la sphère munie d'une corde, la corde ou un chemin entre ses extrémités passant par la sphère,
- * une partie couvrante sur une hypersurface tropicale.

◇

2.5 Chemins dans un espace

Définition 2.18. Soit X un espace. Un *chemin* dans X est une application $\gamma : I \rightarrow X$. Si $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$, on note parfois $\gamma : x \rightsquigarrow y$. Un *lacet* est un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On dit que le chemin est *basé* en $\gamma(0)$.

L'ensemble des chemins de x à y est noté C_{xy} .

Définition 2.19. Deux chemins dans C_{xy} sont homotopes (sous-entendu à extrémités fixées) s'il existe une homotopie dans C_{xy} .

Remarque 2.20. Si X est connexe par arcs, au sens classique, tous les chemins sont homotopes. Donc on dit juste homotopes car sinon tous les chemins sont en fait homotopes. ◆

Proposition 2.21. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins. La classe est notée $[\gamma]$.*

Définition 2.22. * L'inverse d'un chemin $\bar{\gamma}$ est défini par $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$.

* Le produit de chemins $\alpha \in C_{xy}$ et $\beta \in C_{yz}$ est défini par

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 2t \leq 1, \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 2t \geq 1. \end{cases}$$

Proposition 2.23. * les opérations sont compatibles avec l'homotopie :

$$\alpha_1 \simeq \alpha_2 \Rightarrow \bar{\alpha}_1 \simeq \bar{\alpha}_2,$$

$$\alpha_1 \simeq \alpha_2, \beta_1 \simeq \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 \beta_1 \simeq \alpha_2 \beta_2,$$

- * le produit est associatif à homotopie près,
- * les chemins constants sont neutres à homotopie près,
- * l'inverse est un inverse à homotopie près.

3 Chemins et groupe fondamental

3.1 Définition du groupe fondamental

Théorème 3.1. *L'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ des classes d'homotopie de lacets basés en x_0 muni du produit de chemins forme un groupe appelé groupe fondamental.*

Le choix du point de base est à la fois important (homotopie à extrémités fixées) et pas important.

Proposition 3.2. *Soit $\gamma : x \rightsquigarrow y$, alors on a un isomorphisme $\Phi_\gamma : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$.*

Remarque 3.3. Les lacets basés en x_0 peuvent être vus comme applications $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$. On peut également définir $\pi_n(X, x_0)$ comme les applications $(S^n, 1) \rightarrow (X, x_0)$ à homotopie près, avec un produit de concaténation. Ce sont des groupes abéliens, et le π_0 est l'ensemble des composantes connexes par arcs. $\blacklozenge$

Définition 3.4. Un espace est simplement connexe s'il est connexe par arcs et de groupe fondamental trivial.

3.2 Premières propriétés du groupe fondamental

Le groupe fondamental est ce qu'on appelle un *foncteur* de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes.

Théorème 3.5. π_1 est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers les groupes : si $\varphi : X \rightarrow Y$, on a $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$. De plus, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Proposition 3.6. On a $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Théorème 3.7. π_1 est défini sur la catégorie homotopique :

- * Si $\varphi, \psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ sont homotopes relativement à x_0 , elles induisent le même morphisme.
- * Si $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ sont homotopes, le chemin $t \mapsto H(x_0, t)$ donne un isomorphisme $\pi_1(Y, \varphi(x_0)) \simeq \pi_1(Y, \psi(x_0))$ tel que le diagramme commute.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ & \searrow \psi_* & \uparrow \Phi_\gamma \\ & & \pi_1(Y, \psi(x_0)) \end{array}$$

- * Si φ est une équivalence d'homotopie, φ_* est un isomorphisme.

Corollaire 3.8. Le groupe fondamental d'un espace contractile est trivial.

Exemple 3.9. Le groupe fondamental du point et l'invariance par homotopie permet de calculer le groupe fondamental de tous les espaces contractiles. $\blacklozenge$

3.3 Groupe fondamental du cercle

3.3.1 Application exponentielle

On étudie les propriétés de $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, qui seront axiomatisées plus tard sous la notion de revêtement.

Proposition 3.10. On note $U = S^1 - \{1\}$ et $V = S^1 - \{-1\}$. On a

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n - 1; n[\text{ et } \exp^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left] n - \frac{1}{2}; n + \frac{1}{2} \right[,$$

et sur chaque intervalle, $\exp$ est un homéomorphisme.

Définition 3.11. Soit X un espace connexe par arcs et $f : X \rightarrow S^1$ une application continue. On appelle relèvement de f une application $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\exp(\tilde{f}(x)) = f(x)$:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \exp \\ X & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Remarque 3.12. Un relèvement peut ou ne pas exister. On verra plus tard des critères d'existence. $\blacklozenge$

Proposition 3.13 (unicité des relèvements). Soit X un espace connexe par arcs et $f : X \rightarrow S^1$ une application continue. Si deux relèvements de f sont égaux en un point, ils sont égaux.

Théorème 3.14 (relèvement des chemins). Si $\gamma : [a; b] \rightarrow S^1$ est un chemin, et $x_0 \in \mathbb{R}$ est tel que $\exp(x_0) = \gamma(a)$, alors il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(a) = x_0$.

Démonstration. Il existe un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que tout intervalle de taille ε soit contenu dans $\gamma^{-1}(U)$ ou $\gamma^{-1}(V)$. On prend alors une subdivision de pas ε , puis on relève successivement sur chaque intervalle. $\square$

Théorème 3.15 (relèvement des homotopies). Soit $H : [a; b] \times I \rightarrow S^1$ une homotopie et $\tilde{f}$ un relèvement de $f = H_0$. Alors il existe un unique relèvement de l'homotopie H en $\tilde{H} : [a; b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$.

$$\begin{array}{ccc} [a; b] \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \exp \\ [a; b] \times [0; 1] & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

Démonstration. On utilise encore le lemme de Lebesgue : pour un ε suffisamment petit, tout carré de côté ε est inclus dans $H^{-1}(U)$ ou $H^{-1}(V)$. On relève successivement les petits carré en commençant par $[a; b] \times \{0\}$. $\square$

Remarque 3.16. On verra plus tard un critère général de relèvement pour les revêtements généraux. $\blacklozenge$

3.3.2 Groupe fondamental du cercle

On va calculer le groupe fondamental du cercle (histoire d'avoir un exemple non-trivial). Par le relèvement des chemins, on peut relever tout lacet $\gamma : I \rightarrow S^1$ en $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = 0$. On a ensuite $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ et cet entier est appelé *degré* du lacet.

Définition 3.17. Soit $\gamma : I \rightarrow S^1$ un lacet et $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement. Alors $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ est un entier qui ne dépend pas du relèvement choisi, appelé degré.

Théorème 3.18. Le degré est invariant par homotopie et induit un isomorphisme de groupe $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

3.4 Applications du groupe fondamental du cercle

- * Théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme à coefficients complexes non constant admet une racine.
- * Théorème de Brouwer : toute application continue $D^2 \rightarrow D^2$ possède un points fixe.

Corollaire 3.19. *Étant donné deux chemins qui relient les bords opposés du rectangle, ils s'intersectent.*

- * Théorème de Borsuk-Ulam : une fonction $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possède deux points opposés qui ont la même image.

Corollaire 3.20 (Lusternik-Schnirelmann). *Si trois fermés recouvrent S^2 , l'un contient deux points antipodaux.*

Remarque 3.21. On généralisera plus tard en dimension n .



4 Théorème de Van Kampen

On va donner un théorème permettant de calculer de nombreux groupes d'homotopie. Pour l'énoncer, on aura besoin de certains concepts algébriques sur les groupes.

4.1 Groupes libres et présentations de groupes

4.1.1 Groupe libre

On appelle mot sur l'alphabet $A \sqcup A^{-1}$ une suite de caractères. Le mot est dit *réduit* s'il n'y a aucune occurrence de aa^{-1} ou $a^{-1}a$ pour $a \in A$.

Définition 4.1. Si A est un ensemble de générateurs, on appelle groupe libre généré par A l'ensemble des mots réduits sur l'alphabet $A \sqcup A^{-1}$ muni de la réduction de la concaténation.

Exemple 4.2. Si A est un singleton, on récupère $\mathbb{Z}$, sinon, pour A de cardinal n , on note le groupe libre sur n générateurs F_n . $\diamond$

Le groupe libre vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 4.3. *Étant donné une application $f : A \rightarrow G$, il existe un unique morphisme $\varphi : F_A \rightarrow G$ tel que $\varphi(a) = f(a)$.*

4.1.2 Sous-groupe normal engendré par une partie

On connaît déjà la notion de sous-groupe engendré par une partie : si $A \subset G$, il est noté $\langle A \rangle$, c'est le plus petit sous-groupe qui contienne A . On a également la notion de sous-groupe normal engendré par.

Définition 4.4. On appelle sous-groupe normal engendré par $A \subset G$, noté $\langle\langle A \rangle\rangle$ le plus petit sous-groupe normal contenant A . Il est généré par A et ses conjugués.

4.1.3 Présentation d'un groupe

On appelle présentation d'un groupe par générateurs et relations la donnée d'un ensemble de générateurs A de G , et d'une famille de relations dont la clôture normale est le noyau de $F_A \rightarrow G$. Cela est noté $\langle A | R \rangle$.

Exemple 4.5. * Groupe libre si pas de relations :

$$F_2 = \langle a, b | \emptyset \rangle.$$

* Les groupes cycliques :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a | a^n \rangle.$$

* Les réseaux :

$$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

* Le groupe diédral :

$$D_n = \langle r, s | r^n, s^2, sr sr \rangle.$$

$\diamond$

4.2 Produit libre et produit amalgamé

La section précédente introduit certains groupes. On donne maintenant des opérations de constructions de groupes à partir d'autres groupes.

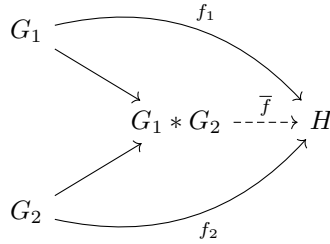
4.2.1 Produit libre

Soient G_1 et G_2 deux groupes. Un mot sur $G_1 \sqcup G_2$ est dit *réduit* s'il n'a pas d'occurrence du neutre, et si deux lettres consécutives ne sont pas dans le même groupe. La réduction d'un mot s'obtient en remplaçant chaque paire consécutive de lettres gg' par la lettre correspondant à leur produit.

Définition 4.6. Étant donné deux groupes G_1 et G_2 , on appelle *produit libre* l'ensemble des mots réduits sur l'alphabet $G_1 \sqcup G_2$ muni de la réduction de la concaténation.

Le produit libre vérifie une *propriété universelle*.

Proposition 4.7. Étant donné deux morphismes $G_1, G_2 \rightarrow H$ vers un groupe H quelconque, il existe un unique morphisme $G_1 * G_2 \rightarrow H$.



Remarque 4.8. On peut procéder de manière identique si l'on possède plus de groupes pour définir le produit libre d'une familles de groupes $*_{\alpha \in A} G_{\alpha}$. ♦

Exemple 4.9. * Pour des copies de $\mathbb{Z}$, on récupère le groupe libre sur le bon nombre de générateurs :

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2.$$

* Si les groupes sont donnés par générateurs et relations, il suffit de concaténer les présentations. Par exemple,

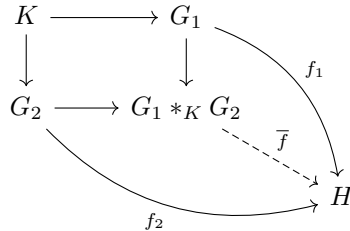
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \langle a, b | a^2, b^3 \rangle.$$

♦

4.2.2 Produit amalgamé

Étant donné deux morphismes $K \rightarrow G_1, G_2$, on appelle *produit amalgamé* de G_1 et G_2 au dessus de K le quotient de $G_1 * G_2$ par le sous-groupe normal engendré par les éléments de la forme $f_1(k)f_2(k)^{-1}$. Il est noté $G_1 *_K G_2$. Le produit amalgamé vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 4.10. Pour tous morphismes $G_1, G_2 \rightarrow H$ qui coïncident sur K , il existe un unique morphisme $G_1 *_K G_2 \rightarrow H$.



Le produit amalgamé est donc le quotient d'un produit libre, ce qui permet facilement d'en donner des présentations.

Exemple 4.11. * Si $K = \mathbb{Z}$, le produit libre est le produit libre quotienté relation supplémentaire $f_1(1)f_2(1)^{-1}$.

- * Si l'un des groupes est trivial, par exemple $G_2 = 0$, le produit amalgamé est égal au quotient de G_1 par le sous-groupe normal engendré par $f_1(K) \subset G_1$.

◇

4.3 Abélianisation d'un groupe

Si G est un groupe, on note $\mathcal{D}(G)$ le sous-groupe généré par les commutateurs, qui est un sous-groupe normal de G . L'abélianisé de G est $G^{\text{ab}} = G/\mathcal{D}(G)$. C'est un groupe abélien. Il vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 4.12. *Si $G \rightarrow A$ est un morphisme vers un groupe abélien il existe un unique morphisme depuis l'abélianisé.*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & \nearrow f^{\text{ab}} & \\ G^{\text{ab}} & & \end{array}$$

Exemple 4.13. L'abélianisé du groupe libre est le groupe abélien libre. L'abélianisation d'un groupe donné par générateurs et relations est donné par les mêmes générateurs et les mêmes relations à commutation près.

* $F_2^{\text{ab}} = \mathbb{Z}^2$

* abélianisé du groupe diédral infini :

$$\langle r, s | s^2, sr sr \rangle = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

*

$$\langle a, b | a^2, b^n \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

◇

4.4 Énoncé du Théorème de Van Kampen

On peut maintenant énoncer le théorème de Van Kampen.

Théorème 4.14. *Soit X un espace topologique connexe par arcs. Soient U et V des ouverts connexes par arcs dont l'intersection est également connexe par arcs qui recouvrent X . Alors pour tout point de base x choisi dans $U \cap V$, on a*

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Exemple 4.15. * bouquet de deux cercles

- * plan projectif
- * ruban de Möbius puis bouteille de Klein
- * non-exemple avec le cercle

◇

5 Applications de Van Kampen

5.1 Énoncé du Théorème de Van Kampen

Théorème 5.1. *Soit X un espace topologique connexe par arcs, U et V des ouverts connexes par arcs dont l'intersection est également connexe par arcs. Alors pour tout point de base choisi dans $U \cap V$, on a*

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x).$$

Remarque 5.2. L'hypothèse que $U \cap V$ connexe par arcs est importante : on a des contre-exemples sinon. $\blacklozenge$

On a également une version avec un nombre quelconque d'ouverts.

Théorème 5.3. *On suppose que l'on a un recouvrement de X par des ouverts (U_i) qui contiennent tous le point de base x , et tels que les intersections deux à deux et trois à trois sont connexes par arcs. Alors le groupe fondamental est égal au produit amalgamé de la famille des $\pi_1(U_i, x)$ au dessus des $\pi_1(U_i \cap U_j, x)$.*

5.2 Preuve du théorème de Van Kampen

Démonstration. On procède en plusieurs points. Tout d'abord, en notant G le produit amalgamé des groupes fondamentaux des ouverts, on a par propriété universelle un morphisme $G \rightarrow \pi_1(X, x)$ dont on va montrer qu'il est un isomorphisme.

- * Le morphisme est surjectif : pour tout chemin, par lemme de Lebesgue, on peut l'écrire comme produit de chemins contenus dans un unique ouvert U_i .
- * Le morphisme est injectif. Pour ce faire, on considère un élément du noyau de $G \rightarrow \pi_1(X, x)$, ce qui veut dire que l'on dispose d'une homotopie entre le chemin constant et le produit dans le noyau. Par lemme de Lebesgue, il existe une subdivision telle que chaque petit rectangle dans I^2 soit d'image contenue dans un des U_i . On découpe alors I^2 en rectangles tels que les intersections quatre à quatre sont vides. Par hypothèse, pour chaque sommet de la subdivision, on peut le relier au point de base par un chemin qui reste dans les deux ou trois ouverts qui le contiennent. Chaque chemin donne une factorisation dans le groupe libre, mais pour chaque segment, il faut choisir dans quel ouvert on le voie. On passe d'un ouvert à un autre par un élément du sous-groupe normal engendré par les $\pi_1(U_i \cap U_j, x)$. On traverse les rectangles par des relations données dans chacun des $\pi_1(U_i, x)$.

□

5.3 Applications

5.3.1 Groupe fondamental des sphères.

La sphère S^n est simplement connexe : il suffit de prendre un voisinage de chaque hémisphère.

5.3.2 Bouquet d'espace.

Soient (X, x) et (Y, y) deux espaces pointés tels que les points admettent un voisinage qui se rétracte sur les points. On a alors le bouquet des espaces $X \vee Y$. Le groupe fondamental vérifie

$$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y).$$

Plus généralement,

$$\pi_1(\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}, \bullet) = *_\alpha \pi_1(X_{\alpha}, x_{\alpha}).$$

Exemple 5.4. * Le groupe fondamental d'un bouquet de cercles.

- * Le groupe fondamental d'un graphe.
- * Le complémentaire de l'entrelac trivial dans $\mathbb{R}^3$ se rétracte sur le bouquet $S^2 \vee S^1$. Donc le groupe fondamental du complémentaire est $\mathbb{Z}$.

◇

5.3.3 Recollement d'une cellule.

Si la cellule est de dimension plus grande que 3, rien ne se passe, si la dimension est 2, on quotiente par la relation donnée par $\mathbb{Z}$.

Exemple 5.5. Le groupe fondamental de l'espace où on recolle une 2-cellule sur un cercle par une application de degré n est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

◇

De cette sorte, il est possible d'obtenir n'importe quel groupe comme groupe fondamental en recollant suffisamment de 2-cellules sur un bouquet de cercles.

5.3.4 Groupe fondamental des surfaces.

Exemple 5.6. * Le groupe fondamental du tore est $\mathbb{Z}^2$.

* Le groupe fondamental du plan projectif est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

* Le groupe fondamental de la bouteille de Klein est $\langle a, b | abab^{-1} \rangle$.

Pour le cas général, mais on peut obtenir plusieurs présentations. Le recollement du $4g$ -gone donne le groupe libre sur $2g$ générateurs quotienté par la relation $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

Corollaire 5.7. Les surfaces de genre g sont deux à deux non homotopes, et en particulier non homéomorphes.

◇

6 Revêtements

On introduit dans cette section la notion de *revêtement*, qui axiomatise les propriétés de la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ pour un espace B qui n'est plus nécessairement S^1 .

6.1 Définition d'un revêtement

Définition 6.1. Un revêtement est une application $p : E \rightarrow B$ telle qu'il existe un recouvrement de B par des ouverts U vérifiant $p^{-1}(U) \simeq U \times F$. Autrement, $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in F} U_i$ et $p : U_i \rightarrow U$ homéomorphisme.

Remarque 6.2. L'espace B s'appelle la base, E l'espace total, $p^{-1}(b)$ la fibre, U un ouvert trivialisant, les U_i les feuillettes. ♦

Exemple 6.3. * l'application exponentielle, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$,

* les fonctions puissances $z \in S^1 \mapsto z^n \in S^1$,

* le quotient par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la sphère : $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, ou plus généralement $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$.

* La surface hélicoïdale $(s, t) \in]0; +\infty[\times \mathbb{R} \mapsto (s \cos(2\pi t), s \sin(2\pi t), t)$ qui revêt $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ par projection horizontale.

* plus tard, on verra que sous certaines hypothèses, étant donné une action $G \curvearrowright X$, l'application quotient $X \rightarrow X/G$ est un revêtement. ♦

Définition 6.4. Étant donné deux revêtements $p_1 : E_1 \rightarrow B$ et $p_2 : E_2 \rightarrow B$, un morphisme de revêtement est une application continue $f : E_1 \rightarrow E_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

6.2 Théorèmes de relèvement

On appelle toujours *relèvement* de $f : X \rightarrow B$ une application $\tilde{f} : X \rightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Lemme 6.5. Si X est connexe, deux relèvements qui coïncident en un point sont égaux.

Démonstration. L'ensemble des points où deux relèvements coïncident est à la fois fermé (car préimage d'un fermé), et ouvert (si deux relèvements coïncident en un point, ils le font sur un voisinage). Par connexité de X , ils sont égaux partout. □

6.2.1 Relèvements chemins et homotopies

Théorème 6.6 (Relèvement des chemins). *Si $\gamma : [a; b] \rightarrow B$ est un chemin, pour tout x tel que $p(x) = \gamma(a)$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [a; b] \rightarrow E$ qui relève γ et tel que $\tilde{\gamma}(a) = x$.*

Démonstration. On procède exactement comme pour le cercle en utilisant le lemme de Lebesgue. $\square$

Théorème 6.7 (Relèvement des homotopies). *Soit $H : X \times I \rightarrow B$ une homotopie et $\tilde{f}$ un relèvement de $f = H_0$. Alors il existe un unique relèvement de l'homotopie H en $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ tel que $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$.*

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow \text{exp} \\ X \times [0; 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Démonstration. On sait que pour tout $x \in X$ il est possible de relever le chemin $t \mapsto H_t(x) \in B$ en un chemin démarrant en $\tilde{f}(x)$, ce qui permet de définir uniquement $\tilde{H}$. Il faut maintenant montrer que ce relèvement est continu. Pour ce faire, on reprend les étapes de la preuve du relèvement des chemins mais au voisinage de $\{x\} \times I$ pour appliquer le lemme du tube par compacité de I . $\square$

6.2.2 Premières illustrations des théorèmes de relèvement

*

Corollaire 6.8. *L'application $p_* : \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B)$ est injective. On a donc un sous-groupe $p_*\pi_1(E) \subset \pi_1(B, b)$.*

Remarque 6.9. Attention, le sous-groupe dépend du choix du point dans la fibre $p^{-1}(b)$ car ça change à conjugaison près. (sinon cf revêtements galoisiens plus tard) L'ensemble des $p_*\pi_1(E, x)$ où x décrit $p^{-1}(b)$ réalisent une classe de conjugaison dans l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(B, b)$. $\blacklozenge$

* Le relèvement des chemins permet de définir une action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur $p^{-1}(b)$ appelée *monodromie*.

Définition 6.10. On a une action à droite $p^{-1}(b) \times \pi_1(B, b) \rightarrow p^{-1}(b)$: si $x \in p^{-1}(b)$ et $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$, on pose alors $x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$, qui ne dépend pas du choix de γ dans la classe d'homotopie.

Proposition 6.11. - Si $x \in E$, $\text{Stab}(x) = p_*\pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b)$.

- Les groupes $\text{Stab}(x)$ forment une classe de conjugaison.

- L'action est transitive, et donc $F_b = p_*\pi_1(E, x) \backslash \pi_1(B, b)$ comme ensemble avec une action/

* Le choix du point de base n'est pas très important grâce à la propriété suivante.

Corollaire 6.12. *Les fibres d'un revêtement ont toutes le même cardinal.*

6.2.3 Relèvement cas général

On peut maintenant énoncer le théorème de relèvement général qui donne un critère à l'existence d'un relèvement.

Théorème 6.13. Soit Y un espace connexe par arcs localement connexe par arcs. Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (B, b)$ et $p : E \rightarrow B$. On choisit $e \in p^{-1}(b)$. Il existe un relèvement $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tel que $\tilde{f}(x_0) = e$ si et seulement si

$$f_*\pi_1(X, x_0) \subset p_*\pi_1(E, e) (\subset \pi_1(B, b)).$$

Démonstration. La condition est nécessaire par fonctorialité du groupe fondamental. Réciproquement, supposons la condition satisfaite. On définit le relèvement comme suit : pour tout $x \neq x_0$, on choisit un chemin $\gamma_x : x_0 \rightsquigarrow x$ que l'on relève. On pose alors $\tilde{f}(x) = \tilde{\gamma}_x(1)$. On vérifie que cette image ne dépend pas du chemin choisi, ce qui est vrai grâce à l'hypothèse, et on vérifie que le relèvement est continu, ce qui se vérifie localement. $\square$

Exemple 6.14. L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Il existe un logarithme complexe sur $U \subset \mathbb{C}^*$ si et seulement si l'image de $\pi_1(U) \subset \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{Z}$ est triviale. $\diamond$

6.3 Revêtements par actions de Groupes

On termine cette section par une large catégorie de revêtements qui sont obtenus par l'action d'un groupe discret.

Définition 6.15. Soit $G \curvearrowright X$ un groupe agissant continûment sur un espace X . On dit que G agit sur X de manière totalement discontinue si pour tout x il existe un voisinage tel que $gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$.

Le résultat principal affirme que le type d'action ci-dessus mène à un revêtement.

Proposition 6.16. Si G agit de manière totalement discontinue sur X connexe par arcs et localement connexe par arcs, alors la projection canonique $p : X \rightarrow X/G$ est un revêtement.

Démonstration. Soit $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U tel que les gU n'intersectent pas U , ce qui implique que les gU sont deux à deux disjoints. On a alors $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_g gU$, qui est donc ouvert. La restriction $p|_{gU} : gU \rightarrow p(U)$ est une bijection continue et ouverte, donc il s'agit d'un homéomorphisme. Ainsi, on a bien un revêtement. $\square$

Exemple 6.17. — L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translations redonne l'exponentielle : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ou plus généralement $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

— L'action antipodale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n donne $\mathbb{R}P^n$.

— Quotient d'un groupe par un sous-groupe discret, par exemple, le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ agit sur la sphère quaternionique S^3 . Ou bien $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$. $\diamond$

On termine en donnant un critère qui permet de s'assurer qu'une action de groupe est bien totalement discontinue dans le cas des espaces localement compacts.

Définition 6.18. Soit G *circlearrowleft* X un groupe discret agissant sur un ensemble.

- * On dit que G opère *proprement* si pour tout K $\{g : gK \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. Cela signifie que l'application $G \times X \rightarrow X$ est propre.
- * L'action est *libre* si $gx = x \Rightarrow g = e$: les stabilisateurs sont tous réduits au neutre.

Proposition 6.19. Un groupe qui agit proprement et librement sur un espace localement compact (séparé !) agit totalement discontinument.

Démonstration. Pour $x \in X$, on choisit un voisinage compact V . Il existe un nombre fini de g_i tels que $g_i V \cap V \neq \emptyset$. On sépare x de chacun des $g_i x : x \in U_i$ et $g x_i \in V_i$. On considère alors

$$W = V \cap \left(\bigcap_i U_i \right) \cap \left(\bigcap_i g_i^{-1} V_i \right).$$

□

Remarque 6.20. Remarquons que la première condition est toujours satisfaite si le groupe est fini, et que la seconde condition n'est en générale pas compliquée à vérifier. ♦

Exemple 6.21. — L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$ revêt le ruban de Möbius par $\mathbb{R}^2$.

- L'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur le tore générée par $(z, w) \mapsto (-z, \bar{w})$ donne un revêtement de la bouteille de Klein par un tore. C'est un cas particulier du *revêtement d'orientation* qui donne un revêtement orientable de degré 2 à toute variété non orientable.
- En revanche, l'action $(z, w) \mapsto (w, z)$ ne donne pas un revêtement car il y a des stabilisateurs non triviaux. Le quotient donne un espace homéomorphe à un ruban de Möbius.

♦

7 Classification des revêtements

Dans cette section, étant donné un espace B connexe par arcs et localement connexe par arcs, on s'attache à classifier les revêtements de B , ce qui est fait au moyen du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ sous l'hypothèse additionnelle que l'espace admet un revêtement qualifié d'*universel*.

7.1 Morphismes de revêtements

On rappelle d'abord la définition de morphisme de revêtement.

Définition 7.1. Étant donné deux revêtements $p_1 : E_1 \rightarrow B$ et $p_2 : E_2 \rightarrow B$, un morphisme de revêtement est une application continue $f : E_1 \rightarrow E_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & B & \end{array}$$

S'il existe $g : E_2 \rightarrow E_1$ un morphisme de revêtement tel que $g \circ f = \text{id}_{E_1}$ et $f \circ g = \text{id}_{E_2}$, on parle d'*isomorphisme* de revêtement. Dans le cas où $E_1 = E_2$, on parle d'*automorphisme*.

En dessinant d'une autre manière le diagramme commutatif, on peut voir un morphisme $f : E_1 \rightarrow E_2$ comme un relèvement de p_1 par p_2 . De ce fait on déduit les propriétés suivantes qui découlent des propriétés sur les relèvements.

Proposition 7.2. Deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux.

Proposition 7.3. On se donne deux revêtements $p_1 : (E_1, x_1) \rightarrow (B, b)$ et $p_2 : (E_2, x_2) \rightarrow (B, b)$. Les deux revêtements sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes $p_{1*}\pi_1(E_1, x_1)$ et $p_{2*}\pi_1(E_2, x_2)$ sont conjugués. Plus précisément, il existe un isomorphisme de revêtement $f : E_1 \rightarrow E_2$ tel que $f(x_1) = x_2$ si et seulement si $p_{1*}\pi_1(E_1, x_1) = p_{2*}\pi_1(E_2, x_2)$.

Corollaire 7.4. Pour $p_1 = p_2$, il existe un automorphisme si et seulement si $p_*\pi_1(E, x_1) = p_*\pi_1(E, x_2)$.

On a également les propriétés suivantes.

Proposition 7.5. Un morphisme de revêtements est un revêtement.

Démonstration. Il suffit de considérer un ouvert trivialisant pour p_1 et p_2 , qui devient un ouvert trivialisant pour f . □

Proposition 7.6. L'action de $\text{Aut}(p)$ est libre et totalement discontinue.

Démonstration. Si $f \in \text{Aut}(p)$ admet un point fixe, on a $f(x) = x$, donc f coïncide avec le morphisme id , ce qui implique que $f = \text{id}$. De même, pour $x \in E$, soit U un ouvert trivialisant et V le feuillet qui contient x . Si $f(V) \cap V \neq \emptyset$, on a l'existence d'un $y = f(y') \in f(V) \cap V$. En particulier, $p(y) = p(f(y')) = p(y')$. Par injectivité de p sur le feuillet V , on a $y = y'$, puis $y = f(y)$ et $f = \text{id}$. □

7.2 Interactions entre monodromie et automorphismes

On rappelle que l'on a défini une action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur la fibre $p^{-1}(b)$. Parallèlement, on a également une action à gauche du groupe des automorphismes du revêtement. L'interaction entre l'ensemble des morphismes de revêtements et la monodromie est donnée par le théorème suivant.

Théorème 7.7. *Si $f : p_1 \rightarrow p_2$ est un morphisme de revêtements, il induit une application $p_1^{-1}(b) \rightarrow p_2^{-1}(b)$ qui est $\pi_1(B, b)$ -équivariante. De plus, on a en réalité une bijection*

$$\text{hom}(p_1, p_2) \longrightarrow \text{hom}_{\pi_1(B, b)}(p_1^{-1}(b), p_2^{-1}(b)).$$

Démonstration. On procède en plusieurs temps. Tout d'abord, on vérifie que l'application induite est bien équivariante en utilisant le théorème de relèvement des chemins. Pour la bijection avec les applications équivariantes, la fonction est bien injective car deux morphismes de revêtements qui coïncident en un point sont égaux. Pour la surjectivité, étant donné un élément $x_1 \in E_1$ et une application équivariante φ , on commence par construire un morphisme de revêtement $f : p_1 \rightarrow p_2$ qui vérifie $f(x_1) = \varphi(x_1)$ en montrant qu'un tel revêtement existe via les stabilisateurs. On vérifie ensuite que l'application induite est bien φ . $\square$

On déduit la propriété suivante.

Corollaire 7.8. * *Si l'action de $\pi_1(B, b)$ est triviale, le revêtement est trivial.*

* *Tout revêtement d'un espace simplement connexe est trivial.*

* *Le groupe des automorphismes d'un revêtement est le groupe des bijections équivariantes.*

7.3 Revêtements galoisiens

On introduit maintenant une famille particulière de revêtement qualifiés de *galoisiens*, qui sont ceux pour lequel le sous-groupe $p_*\pi_1(E, x)$ ne dépend pas du point de base x choisi dans $p^{-1}(b)$.

Théorème 7.9. *Soit $p : E \rightarrow B$ un revêtement calca. on dit qu'il est galoisien s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

(i) *$\exists x$ tel que $p_*\pi_1(E, x)$ est normal.*

(ii) *$\forall x$ tel que $p_*\pi_1(E, x)$ est normal.*

(iii) *L'action du groupe des automorphismes sur la fibre est transitive.*

Démonstration. Les deux premiers points sont équivalents. Pour le troisième point, il existe un automorphisme f envoyant x_1 sur x_2 précisément quand $p_*\pi_1(E, x_1) = p_*\pi_1(E, x_2)$. Ces deux groupes étant conjugués, le théorème en découle. $\square$

On caractérise maintenant les revêtements galoisiens comme les revêtements obtenus comme quotient par une action de groupe.

Théorème 7.10. *Le revêtement obtenu comme le quotient par une action de groupe est galoisien, et son groupe d'automorphisme est isomorphe à G . Réciproquement, si $p : E \rightarrow B$ est un revêtement galoisien, alors $B \simeq E/\text{Aut}(p)$.*

Démonstration. Soit $X \rightarrow X/G$ un revêtement obtenu par quotient d'une action de groupe. Les applications $x \mapsto g \cdot x$ sont des automorphismes de revêtement. L'action de ces automorphismes est transitive, le revêtement est donc galoisien. De plus, pour tout automorphisme f , il existe un élément g tel que $g \cdot x = f(x)$, et f coïncide donc avec l'automorphisme induit par g .

Réciproquement, étant donné un revêtement galoisien $p : E \rightarrow B$, on peut construire un second revêtement $E \rightarrow E/\text{Aut}(p)$ puisque l'action de $\text{Aut}(p)$ est totalement discontinue. Par définition du quotient, on a une application $E/\text{Aut}(p) \rightarrow B$. Comme l'action est transitive, on peut également construire une application $B \rightarrow E/\text{Aut}(p)$ qui à b associe la classe de $x \in p^{-1}(b)$, bien définie car indépendante du choix de x puisque l'action est transitive. $\square$

Proposition 7.11. *Pour un revêtement galoisien, on a en fait $\text{Aut}(p) = \pi_1(B, b)/p_*\pi_1(E, x)$.*

Démonstration. On sait déjà que le groupe des automorphismes est l'ensemble des bijections équivariantes de la fibre. On construit alors un morphisme de groupe

$$\pi_1(B, b) \rightarrow \text{hom}_{\pi_1(B, b)}(p^{-1}(b), p^{-1}(b)).$$

On choisit un élément $x \in p^{-1}(b)$. Pour $[\alpha] \in \pi_1(B, b)$, on définit Φ_α qui vérifie $\Phi_\alpha(x) = x \cdot [\alpha]$, et pour un élément $x \cdot [\beta]$ dans la fibre, $\Phi_\alpha(x \cdot [\beta]) = x \cdot [\alpha\beta]$, qui est bien définie. Le morphisme est surjectif, et son noyau est précisément le stabilisateur de x , donc $p_*\pi_1(E, x)$. $\square$

En particulier, si E est simplement connexe, cela calcule le $\pi_1(B, b)$ comme les automorphismes de p , ce qui permet de calculer le groupe fondamental d'un espace obtenu comme quotient d'un espace simplement connexe.

Exemple 7.12. * Avec $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, on retrouve le fait que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

* Avec $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, on retrouve que $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agit sur S^3 , la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ par $\zeta \cdot (z, w) = (\zeta z, \zeta^p w)$, ce qui donne les *variétés lenticulaires*, dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\diamond$

Remarque 7.13. Dans le cas plus général, on mettrait le normalisateur de $p_*\pi_1(E, x)$ au lieu de $\pi_1(B, b)$, c'est à dire le plus grand sous-groupe dans lequel $p_*\pi_1(E, x)$ est normal. $\blacklozenge$

7.4 Revêtement universel et correspondance

La partie précédente donne des conditions à l'existence d'isomorphismes de revêtements, et associe des sous-groupes dans le groupe fondamental $\pi_1(B, b)$. On réalise maintenant le chemin inverse pour les espaces *semi-localement simplement connexes*.

7.4.1 Revêtement universel

Définition 7.14. Un revêtement $p : E \rightarrow B$ est *universel* si E est simplement connexe.

Proposition 7.15. *Un revêtement universel est universel car il a des morphismes vers tous les revêtements : si $\tilde{p} : \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement universel et $p : E \rightarrow B$ est un revêtement, pour tout $\tilde{x}_0 \in \tilde{p}^{-1}(b)$ et $x_0 \in p^{-1}(b)$, il existe un unique morphisme $f : \tilde{p} \rightarrow p$ qui vérifie $f(\tilde{x}_0) = x_0$. En particulier, le revêtement universel est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. On applique le théorème d'existence des morphismes dont les hypothèses sont satisfaites puisque tout groupe contient le groupe trivial. Un revêtement universel est unique à isomorphisme près puisqu'il existe des morphismes dans les deux sens. $\square$

Remarque 7.16. En particulier, un revêtement universel est galoisien. $\blacklozenge$

Exemple 7.17. * Le revêtement $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ est universel.

* Le revêtement du tore ou de la bouteille de Klein par $\mathbb{R}^2$ sont universels.

* Le revêtement universel du bouquet de deux cercles est l'arbre infini où chaque sommet a valence 4.

* Le revêtement universel de $\mathbb{R}P^n$ est S^n . $\diamond$

On donne maintenant une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un revêtement universel.

Définition 7.18. Un espace est semi-localement simplement connexe (slsc) si tout point admet un voisinage tel que $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ est triviale.

Théorème 7.19. *Un espace calca et slsc admet un revêtement universel. Un espace calca avec un revêtement universel est slsc.*

Démonstration. La condition est nécessaire : s'il existe un revêtement universel, le morphisme $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ peut se factoriser par $\pi_1(\widetilde{X}, x)$, qui est trivial. La condition est donc nécessaire. Réciproquement, on construit le revêtement universel comme l'ensemble des classes d'homotopies de chemins de $x_0 \in X$ à $x \in X$. $\square$

7.4.2 Structure et classification

n peut maintenant énoncer le théorème de classification.

Théorème 7.20. *Soit B un espace calca slsc (avec un revêtement universel $\widetilde{B}$). On a une correspondance entre les classes d'isomorphismes de revêtements et les classes de conjugaison de sous-groupes.*

- * À un revêtement $p : E \rightarrow B$, on associe la classe de conjugaison des sous-groupes $p_*\pi_1(E, x)$.
- * À la classe de conjugaison d'un sous-groupe H , on associe un revêtement dont la fibre est l'ensemble quotient $\pi_1(B, b)/H$ où H est dans la classe de conjugaison.

De plus, le revêtement est galoisien si et seulement si le sous-groupe est normal.

Démonstration. Si H est un sous-groupe, on construit une application en quotientant le revêtement universel par l'action de H :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & & \\ \downarrow \tilde{p} & \searrow p & \\ & & \widetilde{B}/H \\ & \swarrow q & \\ B & & \end{array}$$

On vérifie alors que l'application q est bien un revêtement et que la correspondance est comme annoncée. $\square$

Exemple 7.21. * Les revêtements du cercle sont $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ et les $z \in S^1 \mapsto z^n \in S^1$, qui correspondent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

* Les revêtements de $\mathbb{R}P^2$ sont S^2 et $\mathbb{R}P^2$, qui correspondent aux sous-groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

* Les revêtements à deux feuillets du bouquet de deux cercles sont donnés par les sous-groupes d'indice 2 de F_2 . Ceux-ci sont distingués car d'indice 2, donc noyau d'un morphisme vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a trois tels morphismes, donc trois revêtements, qui sont galoisiens. $\diamond$

Remarque 7.22. Un exemple d'espace qui n'admet pas de revêtement universel est la *boucle hawaïenne* : une union de cercles de plus en plus petits passant tous par 0. En effet, tout voisinage de 0 contient des lacets qu'il n'est pas possible de contracter. $\blacklozenge$

7.4.3 Illustration : théorème de Nielsen-Schreier

- * Le groupe fondamental d'un graphe est libre.
- * Le revêtement d'un graphe est un graphe.
- * Le groupe libre est le groupe fondamental d'un bouquet de cercles.
- * On en déduit que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre : on prend un bouquet de cercles. Le sous-groupe correspond à un certain revêtement, qui est lui aussi un graphe. Le groupe fondamental (égal au sous-groupe) est donc lui aussi libre.

8 Introduction à l'homologie : les Δ -complexes et leur homologie

Le groupe fondamental permet de distinguer des espaces, mais il ne fait intervenir que le “2-squelette” des espaces, pas les informations de dimension supérieure. Les groupes d'homotopie supérieurs pourraient donner cette information mais ils sont extrêmement durs à calculer. Par exemple, même les $\pi_i(S^n)$ sont compliqués à calculer. On introduit donc une machine différente baptisée *homologie*. Son introduction est couteuse en termes mathématiques et technique à mettre en place, mais son utilisation est plus facile et très puissante.

8.1 Motivation

Par l'exemple, on considère les quatre espaces suivants.

- * Pour le premier espace, on considère les lacets. On a par exemple ab^{-1} , bc^{-1} , etc... Il faut cependant choisir un point de base. Changer de point de base revient à changer l'ordre des lettres ou à conjuguer. En passant à l'abélianisé, on n'a plus à s'en soucier, et il reste donc, en notation additive, $a - b$, $b - c$ et $c - d$. Plus généralement, une somme formelle $ka + lb + mc + nd$ est un *cycle* si la somme des entrées/sorties en les deux sommets sont nulles. Cette notion se généralise à tout graphe. En notant C_0 le $\mathbb{Z}$ -module généré par les sommets et C_1 celui généré par les arêtes, on a une application de bord

$$\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0,$$

qui envoie une arête orientée $[v_0, v_1]$ sur la somme formelle $v_1 - v_0$. Une somme formelle d'arêtes σ réalise un cycle si et seulement si $\partial\sigma = 0$. On définit alors $H_1(X_1) = \ker \partial_1$.

- * Pour le second espace, on a recollé une 2-cellule le long du cycle $b - a$. Celui-ci est maintenant homotopiquement trivial : il ne correspond plus à un trou dans le graphe. Cela suggère de maintenant quotienter le $\mathbb{Z}$ -module des cycles par $b - a$. Algébriquement, on peut rajouter un maillon C_2 , qui est le $\mathbb{Z}$ -module généré par la 2-cellule à la chaîne pour obtenir

$$C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0.$$

L'application de bord envoie le générateur U de C_2 sur $b - a$: $\partial U = b - a$. On définit dans ce cas $H_1(X_2) = \ker \partial_1 / \text{Im} \partial_2$, ce qui correspond au cas précédent en prenant $C_2 = 0$.

- * Pour le troisième espace, on a rajouté deux 2-cellules U et V ayant le même bord $b - a$. On a donc maintenant un noyau à l'application de bord $C_2 \rightarrow C_1$. Le noyau est généré par $U - V$, qui correspond à une sphère. L'espace semble posséder un trou de nature différente car de dimension 2. On a maintenant $H_2 = \ker \partial_2$.
- * En rajoutant une 3-cellule le long des deux 2-cellules de l'espace précédent, on rajoute un maillon $C_3 \rightarrow C_2$ dont l'image du générateur est précisément $U - V$.

On va maintenant généraliser cette construction en toute dimension. Ceci se fait naturellement pour une famille d'espaces appelés Δ -complexes. La difficulté consiste en la définition des *applications de bord* ∂_i , qui s'est faite géométriquement en petite dimension.

8.2 Δ -complexes

On note Δ^n le simplexe de dimension n :

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}.$$

Les sommets se trouvent sur les axes de coordonnée. L'ordre des sommets est important. L'union des faces s'appelle le *bord*, noté $\partial\Delta^n$. L'intérieur $\mathring{\Delta}^n$ est le complémentaire du bord.

Définition 8.1. Un espace topologique X admet une structure de Δ -complexe s'il existe une famille $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$, n dépendant de α telle que

- (i) la restriction $\sigma_\alpha|_{\Delta^n}$ est injective, et chaque point de X appartient à l'image d'exactly une telle restriction,
- (ii) la restriction de σ_α à une face de Δ^n est un certain $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ (en préservant l'ordre sur les sommets),
- (iii) un ensemble U est ouvert dans X si et seulement si chaque $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ est ouvert dans Δ^n .

Remarque 8.2. La dernière condition sert à éviter de considérer chaque point comme un 0-simplexe. Elle permet également de reconstruire X comme un quotient d'une famille de simplexes : concrètement, un Δ -complexe est un recollement de simplexes. $\blacklozenge$

Exemple 8.3. * Les graphes sont des Δ -complexes.

* Le tore, la bouteille de Klein, le ruban de Möbius sont des Δ -complexes, comme toute surface plus généralement.

* La sphère en prenant deux simplexes que l'on recolle le long de leur bord. $\diamond$

8.3 Homologie d'un Δ -complexe

On considère un Δ -complexe X . On note $\Delta_n(X)$ le $\mathbb{Z}$ -module généré par les n -simplexes de la structure. On définit une application de bord $\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$ de la façon suivante : si σ_α ayant pour sommets $[v_0, \dots, v_n]$ est un n -simplexe, on pose

$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]} \in \Delta_{n-1}(X).$$

Exemple 8.4. Cette définition du bord généralise la définition intuitive en petite dimension :

- * $\partial_1[v_0, v_1] = v_1 - v_0$,
- * $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$,
- * $\partial_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$.

$\diamond$

Lemme 8.5. La composition $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ est nulle.

Démonstration. Il suffit d'écrire la double somme. $\square$

En notant $C_n = \Delta_n(X)$, on obtient l'objet suivant

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

qui est appelé un *complexe de chaîne*. Les éléments de $Z_n = \ker \partial_n \subset C_n$ sont appelés *cycles*. Les éléments de $B_n = \text{Im} \partial_{n+1} \subset C_n$ sont appelés *bords*. Le quotient Z_n/B_n est appelé *n -ième groupe d'homologie*.

Définition 8.6. L'homologie du complexe de chaîne $\Delta_n(X)$ est appelée *homologie du Δ -complexe*, notée $H_n^\Delta(X)$.

Exemple 8.7. * Pour le cercle S^1 avec la structure comportant un unique 0-simplexe et un unique 1-simplexe, $H_n^\Delta(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

* Pour le tore,

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* Pour le plan projectif $\mathbb{R}P^2$

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* On peut également voir que $H_n^\Delta(S^n) = \mathbb{Z}$.

◇

Remarque 8.8. A priori, l'homologie dépend de la structure de Δ -complexe choisie.

◆

9 Théorie homologique : catégories et manipulation de complexes

Dans la section précédente, on a introduit l'homologie pour les Δ -complexes, qui est a priori simple à appréhender et permet de faire des calculs dans plusieurs cas. Cependant, ses propriétés abstraites ne sont pas évidentes puisque tout semble a priori dépendre de la structure de Δ -complexe, qui n'est pas naturelle. Dans la section suivante, on va donc introduire une seconde homologie, appelée *singulière*, dont les propriétés abstraites seront plus simple à montrer, mais qui sera essentiellement impossible à calculer. On montrera a posteriori que les deux homologies coïncident. Avant de ce faire, afin de rendre les preuves plus digestes et naturelles, on donne un certain nombre de concepts abstraits permettant d'extraire les constructions algébriques génériques des constructions topologiques qui suivront.

9.1 Vocabulaire des catégories

On introduit dans cette section un certain vocabulaire qui va permettre de manipuler plus facilement certains des objets qui vont suivre, et extraire certaines constructions abstraites de ce qui va suivre.

Définition 9.1. On appelle *catégorie* la donnée d'une collection d'objet et pour chaque paire d'objets (A, B) un ensemble de flèches appelées *morphismes* $\text{hom}(A, B)$ telle que :

- (i) On peut composer les flèches $\text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ et la composition est associative.
- (ii) Chaque $\text{hom}(A, A)$ possède un élément id_A qui est un neutre pour la composition.

Exemple 9.2. On donne maintenant un certain nombre d'exemples, pour la plupart déjà connus.

- * La catégorie des ensembles Ens avec les applications entre ensembles.
- * La catégorie des espaces topologiques Top avec les applications continues.
- * La catégorie des espaces topologiques HTop avec les applications continues à homotopie près.
- * La catégorie des groupes Grp avec les morphismes de groupes.
- * La catégorie des groupes abéliens Ab avec les morphismes de groupes abéliens.
- * La catégorie des $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels $\mathbb{k}$ -ev avec les applications linéaires.

◇

Définition 9.3. On appelle un *foncteur* d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ la donnée d'une application $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et pour chaque flèche $A \xrightarrow{f} B$ dans $\mathcal{C}$ une flèche image $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ telle que $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$, et la composition est respectée.

Exemple 9.4. * On a les foncteurs d'oubli du type Top $\rightarrow$ Ens.

- * On a les foncteurs libres du type Ens $\rightarrow$ Grp qui à un ensemble A associe le groupe libre généré par A .
- * Le foncteur qui à un espace vectoriel associe son dual est *contravariant* car il renverse le sens des flèches.
- * Le groupe fondamental est un foncteur Top $\rightarrow$ Grp.

◇

9.2 Complexes de chaînes et homologie

On décrit d'abord la “machine homologique”, qui est une construction algébrique abstraite.

9.2.1 Catégorie des complexes de chaîne

Définition 9.5. Un complexe de chaîne $C_\bullet$ est un diagramme de la forme

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots,$$

où $d_n \circ d_{n+1} = 0$, ou plus brièvement $d^2 = 0$.

Définition 9.6. Étant donnés deux complexes $C_\bullet$ et $D_\bullet$, un morphisme de complexes est une famille d'applications $f_i : C_i \rightarrow D_i$ telles que $f_{i-1} \circ d_i^C = d_i^D \circ f_i$, ou plus brièvement $d \circ f = f \circ d$.

Remarque 9.7. L'ensemble des complexes de chaînes forme une *catégorie*. ♦

9.2.2 Homologie et fonctorialité

On définit les *cycles* $Z_i(C_\bullet) = \ker d_i$, les *bords* $B_i(C_\bullet) = \text{Im } d_{i+1}$, et le i -ième groupe d'homologie : $H_i(C_\bullet) = Z_i(C_\bullet)/B_i(C_\bullet)$.

Lemme 9.8. Un morphisme de complexes $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ induit des applications entre les groupes d'homologie $H_i(f) : H_i(C_\bullet) \rightarrow H_i(D_\bullet)$. Les H_i sont des foncteurs de la catégorie des complexes de chaînes vers la catégorie des modules.

9.3 Manipulation des complexes de chaînes et de l'homologie

9.3.1 Homotopies entre morphismes de complexes de chaînes

On introduit une notion naturelle d'*homotopie* entre les morphismes de complexes de chaîne, notion a priori abstraite qui portera ses fruits plus tard.

Définition 9.9. Étant donnés deux morphismes $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$, on dit que f et g sont homotopes s'il existe une famille d'applications $h_i : C_i \rightarrow D_{i+1}$ qui vérifie

$$f_i - g_i = h_{i-1} \circ d_i^C + d_{i+1}^D \circ h_i,$$

ou plus brièvement $f - g = dh + hd$.

Lemme 9.10. (i) La relation d'homotopie est une relation d'équivalence.

(ii) La relation d'homotopie est stable par composition.

(iii) Deux applications homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie.

Démonstration. Le premier point est clair. Pour le second point, il suffit de composer les homotopies et d'utiliser le fait que les applications commutent à d . Pour le dernier point, cela découle de l'expression $f - g = dh + hd$: pour des cycles, les images diffèrent d'un élément du bord. □

Remarque 9.11. On peut donc aussi définir les notions d'équivalence d'homotopie pour les complexes de chaîne. ♦

9.3.2 Suite exacte longue associée à une suite exacte courte

Un dernier outil avant de retourner à l'étude des espaces topologiques.

Lemme 9.12. Étant donné une suite exacte courte de morphismes de complexe de chaîne, $0 \rightarrow C_\bullet \rightarrow D_\bullet \rightarrow E_\bullet \rightarrow 0$, ce qui signifie qu'en chaque maillon on a une suite exacte courte, alors on a une suite exacte longue en homologie :

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(E_\bullet) \rightarrow H_i(C_\bullet) \rightarrow H_i(D_\bullet) \rightarrow H_i(E_\bullet) \rightarrow H_{i-1}(C_\bullet) \rightarrow \cdots.$$

Démonstration. Effectuer une chasse au diagramme.

□

Lemme 9.13. *La suite exacte longue est naturelle : si on a un morphisme de suite exactes courtes, on a un morphisme de suite exactes longues.*

10 Homologie Singulière, définitions et premières propriétés

Dans la dernière section, on a défini une machine homologique abstraite permettant d'obtenir des groupes d'homologie à partir d'un *complexe de chaîne*. De plus, ceux-ci sont des foncteurs invariants par homotopie de chaîne. On va maintenant définir un foncteur de $\underline{\text{Top}} \rightarrow \underline{\text{Ch}}(\mathbb{Z})$ qui à un espace topologique associe un complexe de chaîne, pour ensuite appliquer la *machine homologique* afin d'obtenir des groupes abéliens appelés *groupes d'homologie*.

10.1 Homologie singulière

10.1.1 Définition

En l'absence de structure de Δ -complexe, d'une certaine manière, on considère l'ensemble de tous les simplexes possibles dans un espace topologique X . On pose $C_n(X) = C^0(\Delta^n, X)$ comme l'ensemble des applications continues $\Delta^n \rightarrow X$. On définit un opérateur de bord $\partial_{n-1} : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ par

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]},$$

où le chapeau signifie que l'on saute le sommet en question.

Lemme 10.1. *Le complexe est bien un complexe de chaîne : $\partial^2 = 0$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\partial^2 = 0$, ce qui est vérifié grâce au $(-1)^i$. □

Définition 10.2. Les groupes d'homologie singulière de X , notés $H_i(X)$, sont les groupes d'homologie du complexe $C_\bullet(X)$.

Remarque 10.3. Par définition, deux espaces homéomorphes ont les mêmes groupes d'homologie et il est clair que les groupes d'homologie sont des foncteurs, par composition. Il n'est pas clair pour des espaces homotopes ont les mêmes groupes d'homotopie, ni que des applications homotopes induisent les mêmes morphismes, ce qui signifierait qu'ils sont des foncteurs $\underline{\text{HTop}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$. ◆

On a toujours l'appellation de *cycles*, *bords*, *chaînes*, qui sont assorties de l'adjectif *singulier*.

Remarque 10.4. On peut voir un cycle singulier $\sum \pm \sigma_i$ comme une application depuis un certain Δ -complexe. Ainsi, un 1-cycle est une collection de boucles, un 2-cycle est une application depuis une surface. Un 1-cycle est *homologue* à 0 s'il existe une surface dont le bord est précisément le 1-cycle. ◆

10.1.2 Premières propriétés

On donne maintenant quelques propriétés découlant de la définition.

Proposition 10.5. *Supposons que $X = \bigsqcup X_\alpha$ où les X_α sont connexes par arcs. Alors on a*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus H_n(X_\alpha).$$

Démonstration. Le complexe de chaîne se scinde en la somme directe des complexes pour chacune des composantes connexes. □

Proposition 10.6. *Si X est connexe par arcs, on a $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Démonstration. On considère l'application $C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à $\sum n_i x_i$ associe $\sum n_i$. Cette application est surjective, et le noyau, correspondant aux chaînes à somme nulle, qui correspondent exactement aux bords des 1-chaînes. □

Remarque 10.7. On peut augmenter le complexe de chaîne par $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ de manière à définir l'“homologie réduite” pour avoir $\widetilde{H}_0(X) = 0$ si X est connexe par arcs. $\blacklozenge$

Proposition 10.8. *Si X est un singleton, on a $H_n(X) = 0$ si $n \geq 1$.*

Démonstration. On a pour tout n , $C_n(\{*\}) = \mathbb{Z}$, et les opérateurs de bord alternent entre id et 0 . $\square$

10.2 Invariance par homotopie

Dans cette section, on répond à la première question en montrant que les foncteurs $H_i : \underline{\text{HTop}} \rightarrow \underline{\text{Ab}}$: des applications homotopes induisent les mêmes morphismes, et des espaces homotopes ont des groupes d'homologie isomorphes.

Théorème 10.9. *Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont des applications homotopes, alors $H_i(f) = H_i(g) : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$.*

Démonstration. La preuve repose sur l'existence d'une triangulation du prisme $\Delta^n \times I$ afin de construire une homotopie de complexes de chaînes entre f_* et g_* . On note $[v_0, \dots, v_n]$ le simplexe $\Delta^n \times \{0\}$ et $[w_0, \dots, w_n]$ le simplexe $\Delta^n \times \{1\}$. On peut alors découper le prisme (qui est de dimension $n+1$) en les $(n+1)$ -simplexes $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$. Si $H : X \times I \rightarrow Y$ est une homotopie et $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ un simplexe, on pose

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i H \circ (\sigma \times \text{id}_I)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

qui correspond juste à pousser en avant le prisme par l'homotopie. On vérifie alors que

$$\partial P = g_* - f_* - P\partial.$$

Le terme de gauche est le bord du prisme, les termes de droite correspondent à la face haute, basse, et le bord. $\square$

Corollaire 10.10. *Une équivalence d'homotopie induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie. Deux espaces homotopes ont des groupes d'homologie isomorphes.*

Corollaire 10.11. *Un espace contractile a les mêmes groupes d'homologie qu'un point.*

10.3 Homologie relative

La prochaine étape est de relier l'homologie d'un quotient X/A à l'homologie de X et A . Ceci permettrait par exemple de calculer l'homologie des sphères en écrivant $S^n = D^n / \partial D^n$, ou bien des bouquets. Malheureusement, la relation $H_n(X/A) = H_n(X)/H_n(A)$ est malheureusement fautive en générale, en fait, les groupes vont s'inscrire dans une suite exacte longue. Afin de l'obtenir, on introduit un outil supplémentaire très légèrement différent baptisé *homologie relative*.

Il est parfois intéressant d'oublier une certaine partie des données, comme par exemple en arithmétique, travailler modulo n . Ici, cela se fait en regardant l'homologie de X modulo A . On a les chaînes de X relatives à $A : C_\bullet(X, A) = C_\bullet(X)/C_\bullet(A)$, qui s'insèrent dans la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow 0.$$

Par définition, les groupes d'homologie de ce complexe sont les $H_\bullet(X, A)$.

Proposition 10.12. *Ils s'insèrent dans une suite exacte longue :*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow \cdots$$

On montrera la prochaine fois que pour les *bonnes paires* (X, A) (A est fermé qui est rétracte par déformation d'un de ses voisinages), alors $H_n(X, A) \simeq \widetilde{H}(X/A)$.

Remarque 10.13. Un élément de $C_n(X, A)$ est un bord s'il s'écrit de la forme $\partial\beta + \gamma$ où $\beta \in C_{n+1}(X)$ et $\gamma \in C_n(A)$: un bord modulo A . $\blacklozenge$

Remarque 10.14. On a de même pour les groupes d'homologie réduite. Les groupes d'homologie relative réduite sont les mêmes que les non réduits si $A \neq \emptyset$. $\blacklozenge$

Pour $A \neq \emptyset$, on a des isomorphismes entre $H_n(A)$ et $H_n(X)$ précisément quand les groupes d'homologie relative sont nuls.

Exemple 10.15. On a $H_n(X, x_0) \simeq \widetilde{H}_n(X)$. $\diamond$

Proposition 10.16. *Les groupes d'homologie relative sont des foncteurs de la catégorie des paires d'espace vers les groupes abéliens, qui sont compatibles avec l'homotopie.*

Théorème 10.17. *On a aussi une suite exacte longue lorsque $A \subset B \subset X$.*

Démonstration. On a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow C_\bullet(B, A) \rightarrow C_\bullet(X, A) \rightarrow C_\bullet(X, B) \rightarrow 0.$$

$\square$

11 Excision et Équivalence entre les différentes théories homologiques

Dans cette section on donne les preuves de certains résultats techniques permettant de clore les technicités sur le calcul des groupes d'homologie :

- * le lemme des petites chaînes qui va permettre de montrer que homologies simpliciales et singulières coïncident,
- * le théorème d'excision pour l'homologie relative, qui permet de montrer que $H_n(X, A) = \widetilde{H}_n(X/A)$ pour les bonnes paires,
- * la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui joue un rôle analogue au théorème de Van Kampen dans le calcul des groupes d'homologie.

Les résultats seront résumés en section suivante et des applications présentées.

11.1 Lemme des petites chaînes

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de X . On note $C_\bullet^\mathcal{U}(X)$ l'ensemble des chaînes singulières telles que chaque simplexe soit à valeurs dans un des ouverts du recouvrement. L'enjeu est de relier l'homologie singulière à celle calculée avec des “petits” simplexes. Intuitivement, les deux doivent coïncider puisque si un simplexe est trop “gros”, il est toujours possible de le subdiviser.

Proposition 11.1 (lemme des petites chaînes). *L'inclusion $C_\bullet^\mathcal{U}(X) \rightarrow C_\bullet(X)$ induit une équivalence d'homotopie de chaînes.*

Démonstration. (1) Chaque simplexe possède une *subdivision barycentrique*. De plus, le diamètre de chaque cellule de la subdivision est au plus $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre avant subdivision. En particulier, il tend vers 0 lorsqu'on continue de subdiviser.

- (2) On a un opérateur de subdivision S qui associe à chaque simplexe sa subdivision : $S\sigma = \sum \dots$. Comme la subdivision barycentrique induit la subdivision barycentrique du bord, on peut vérifier que

$$\partial S = S \partial.$$

De plus, on a une homotopie de chaîne T telle que

$$T\partial + \partial T = \text{id} - S.$$

- (3) On peut le faire sur les simplexes dans $\mathbb{R}^n$, puis ça passe aux simplexes singuliers en les poussant en avant dans X .
- (4) Pour chaque simplexe singulier, $\mathcal{U}$ induit un recouvrement. En subdivisant suffisamment, le diamètre des cellules devient plus petit que le nombre de Lebesgue du recouvrement, et donc chaque cellule est incluse dans un des ouverts du recouvrement. Pour chaque σ , on peut trouver un $m(\sigma)$, et on pose $D\sigma = S^{m(\sigma)}\sigma$. On pose alors ρ défini par

$$D\partial + \partial D = \text{id} - \rho.$$

On vérifie alors que ρ commute à ∂ et qu'il envoie $C_\bullet(X)$ vers $C_\bullet^\mathcal{U}(X)$.

□

11.2 Théorème d'excision et homologie relative

Théorème 11.2. *On suppose que l'on a des inclusions $Z \subset A \subset X$ avec $\overline{Z} \subset \mathring{A}$. Alors l'inclusion induit des isomorphismes $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$.*

Démonstration. On utilise le recouvrement donné par $U = X - \overline{Z}$ et $V = \mathring{A}$. On note $C(U + V)$ pour $C^{\mathcal{U}}(X)$. On a alors une équivalence d'homotopie $C(U + V)/C(U) \rightarrow C(X)/C(U)$ induite par le lemme des petites chaînes. D'autre part, on a une équivalence d'homotopie induite par $C(V)/C(U \cap V) \rightarrow C(U + V)/C(U)$ puisque c'est même un isomorphisme : on ne garde que les simplexes à valeurs dans V et pas dans U . D'où les isomorphismes recherchés. $\square$

Proposition 11.3. *Pour une bonne paire (X, A) , l'application quotient $(X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induit des isomorphismes $H_n(X, A) \simeq H_n(X/A, A/A) \simeq \widetilde{H}_n(X/A)$.*

Démonstration. Soit V un voisinage de A qui se rétracte dessus. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}.$$

La flèche en haut à gauche est un isomorphisme par suite exacte longue de la paire $A \subset V \subset X$. De même en bas à gauche. Les flèches horizontales de droite sont des isomorphismes par excision. La flèche verticale à droite est un isomorphisme car c'est induit par un homéomorphisme. D'où le résultat. $\square$

Théorème 11.4. *Soit (X, A) une paire telle que A soit fermé non vide qui est un rétracte par déformation d'un de ses voisinages. Alors on a la suite exacte longue*

$$\cdots \rightarrow \widetilde{H}_{n+1}(X/A) \rightarrow \widetilde{H}_n(A) \rightarrow \widetilde{H}_n(X) \rightarrow \widetilde{H}_n(X/A) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \widetilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0.$$

Démonstration. On utilise l'isomorphisme ci-dessus avec la suite exacte longue en homologie relative. $\square$

11.3 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Théorème 11.5. *Supposons que l'on a un recouvrement de X par deux ouverts U et V . On a une suite exacte longue*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X) \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow \cdots.$$

Démonstration. On a une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \rightarrow C_\bullet(U \cap V) \rightarrow C_\bullet(U) \oplus C_\bullet(V) \rightarrow C_\bullet(U + V) \rightarrow 0.$$

La première flèche est donnée par $\alpha \mapsto (\alpha, -\alpha)$ et la seconde par $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 + \alpha_2$. On en déduit une suite exacte longue en homologie. De plus, par le lemme des petites chaînes, le dernier complexe donne les groupes d'homologie de X . $\square$

11.4 Équivalence des homologies simpliciales et singulières

On a des morphismes $H_n^\Delta(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ induit par un morphisme de complexe de chaînes.

Théorème 11.6. *Les morphismes ci-dessus sont des isomorphismes. En particulier, l'homologie simpliciale ne dépend pas de la subdivision.*

Démonstration. On suppose que le Δ -complexe est de dimension finie. On fonctionne par récurrence sur la dimension en utilisant la suite exacte longue de la paire $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$. $\square$

12 L'Homologie en action

Dans la section précédente, très technique, on a montré les résultats suivants qui permettent d'appréhender sereinement le calcul des groupes d'homologie :

- * L'homologie simpliciale est la même que la singulière, et donc ne dépend pas de la subdivision. On peut calculer l'homologie à l'aide d'une structure de Δ -complexe.
- * Pour une paire (X, A) où A est un fermé qui est un rétracte par déformation d'un de ses voisinages, on a une suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow \widetilde{H}_{n+1}(X/A) \rightarrow \widetilde{H}_n(A) \rightarrow \widetilde{H}_n(X) \rightarrow \widetilde{H}_n(X/A) \rightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \widetilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0.$$

- * Pour un recouvrement de X par des ouverts U et V , on a la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X) \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow \cdots .$$

12.1 Quelques exemples de calculs

Exemple 12.1. On peut calculer l'homologie des sphères.

- * En utilisant Mayer-Vietoris avec les ouverts U et V qui sont des voisinages des hémisphères, et $U \cap V$ qui se rétracte sur la sphère de dimension $n - 1$. La suite exacte longue donne

$$0 \rightarrow H_i(S^n) \rightarrow H_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0.$$

On en déduit que $H_i(S^n) = \mathbb{Z}$ si $i = 0, n$ et 0 sinon par récurrence.

- * En utilisant le fait que $S^n = D^n / \partial D^n$, on obtient la même formule de récurrence.

◇

Proposition 12.2. Soit (X_α, x_α) une famille d'espaces correctement pointés. Le bouquet a l'homologie suivante :

$$\widetilde{H}_\bullet(\bigvee X_\alpha) = \bigoplus \widetilde{H}_\bullet(X_\alpha).$$

Démonstration. Le bouquet des espaces est le quotient de l'union disjointe, donc l'homologie du quotient est égale à l'homologie relative, qui est elle-même la somme des homologies relatives par rapport aux points de base, donc la somme des homologies réduites. □

Exemple 12.3. Pour un bouquet de sphères, pour $i \geq 1$, $H_i(X) = \mathbb{Z}^{n_i}$, où n_i est le nombre de sphères de dimension i . ◇

Exemple 12.4. L'homologie de la bouteille de Klein peut être obtenue à l'aide d'une structure de Δ -complexe, ou bien en remarquant que la bouteille de Klein est le recollement de deux rubans de Möbius le long de leur bord. La suite de Mayer-Vietoris donne alors

$$0 \rightarrow H_2(K) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2, -2)} \mathbb{Z}^2 \rightarrow H_1(K) \rightarrow 0.$$

On en déduit que $H_2(K) = 0$ et $H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ◇

12.2 Quelques théorèmes d'applications

On déduit maintenant quelques résultats plus intéressants.

Théorème 12.5 (Brouwer). *Toute application continue $D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe.*

Démonstration. Il n'existe pas de rétraction $D^n \rightarrow S^{n-1}$, donc toute application admet un point fixe car elle permettrait d'en construire une. $\square$

Théorème 12.6 (Invariance de la dimension). *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ et homéomorphe à $V \subset \mathbb{R}^m$, alors $m = n$.*

Démonstration. Par excision puis suite exacte longue de la paire, $H_i(U, U - \{x\}) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}) \simeq H_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{x\})$, qui se rétracte sur une sphère. Donc l'homologie est nulle en dehors $i = n$, où elle vaut $\mathbb{Z}$. $\square$

12.3 Un exemple plus compliqué : le théorème de Jordan

Théorème 12.7. (i) *On suppose que l'on a un plongement $h : D^k \rightarrow S^n$, alors $\widetilde{H}_i(S^n - h(D^k)) = 0$ pour tout i .*

(ii) *On suppose que l'on a un plongement $h : S^k \rightarrow S^n$ avec $k < n$, alors $\widetilde{H}_i(S^n - h(S^k)) = \mathbb{Z}$ pour tout $i = n - k - 1$ et 0 sinon.*

Démonstration. On utilise le fait que $D^k \simeq I^k$, et on fonctionne par récurrence sur k . Le résultat est vrai pour $k = 0$ car $S^n - \{x\} \simeq \mathbb{R}^n$. Supposons le résultat vrai pour k . On écrit $I^{k+1} = I^k \times [0; \frac{1}{2}] \cup I^k \times [\frac{1}{2}; 1]$, et on applique Mayer-Vietoris aux complémentaires U et V des images de ces deux compacts. On cherche l'homologie de $U \cap V$, et par récurrence on connaît celle de $U \cup V$. De $H_i(U \cap V) \hookrightarrow H_i(U) \oplus H_i(V)$, on déduit qu'un cycle non nul dans $H_i(U \cap V)$ ne l'est pas dans soit U soit V . Par induction on construit une suite imbriquée de segments I_m telle que α n'est pas un bord dans $S^n - h(I^k \times I_m)$, donc pas non plus dans $S^n - h(I^k \times \{l\})$, où l est l'intersection des I_m . Contradiction avec l'hypothèse de récurrence. Pour le second point, on écrit juste S^k comme l'union de deux disques de dimension k , puis on applique Mayer-Vietoris. $\square$

Corollaire 12.8 (Théorème de Jordan). *Un plongement $S^1 \rightarrow S^2$ sépare S^2 en deux composantes connexes.*

13 Degré d'une application et homologie cellulaire

On continue dans les applications de l'homologie pour définir le *degré* d'une application. On utilise ensuite le degré pour montrer quelques résultats, et pour définir l'homologie *cellulaire*, qui donne une autre manière de calculer l'homologie d'un espace, pourvu que celui-ci soit muni d'une décomposition cellulaire.

13.1 Degré d'une application de S^n dans elle-même

Une application continue $f : S^n \rightarrow S^n$ induit un morphisme $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$. Comme $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, ce morphisme est de la forme $d \cdot$ pour un certain d appelé *degré* de f .

Proposition 13.1. *Le degré vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) $\deg \text{id} = 1$,
- (ii) si f n'est pas surjective, $\deg f = 0$,
- (iii) si $f \simeq g$, alors $\deg f = \deg g$ (la réciproque est vraie),
- (iv) $\deg f \circ g = \deg f \deg g$, en particulier le degré d'une équivalence d'homotopie est ± 1 ,
- (v) le degré d'une réflexion est -1 ,

En composant $n+1$ réflexions, on voit que l'application antipodale a degré $(-1)^{n+1}$. On peut donc montrer le théorème suivant dit de la "boule chevelue"

Théorème 13.2 (Boule chevelue). *La sphère S^n possède un champ de vecteurs tangents non nuls si et seulement si n est impair.*

Démonstration. Si n est impair, le champ de vecteurs $(-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$ est tangent et ne s'annule pas. Réciproquement, supposons qu'il existe un champ de vecteurs v non nuls. Alors $(x, t) \mapsto x \cos t + v(x) \sin t$ fournit une homotopie entre id et $-\text{id}$, qui ont donc même degré : $(-1)^{n+1} = 1$. On a donc que n est impair. $\square$

Proposition 13.3. *Supposons que f agisse sans point fixe sur S^n . Alors $\deg f = (-1)^{n+1}$.*

Démonstration. En effet, considérons $(x, t) \mapsto (1-t)f(x) - tx$. L'application ne s'annule pas : il est possible de la normaliser pour obtenir une homotopie entre f et l'application antipodale. $\square$

Corollaire 13.4. *Si n est pair, le seul groupe qui agisse librement sur S^n est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Tout élément non trivial agit sans point fixe, et donc a degré $(-1)^{n+1} = -1$. Le degré étant un morphisme, on déduit que le groupe a cardinal 2. $\square$

L'application antipodale fournit un exemple de telle action. On va maintenant donner une manière de calculer le degré. Compté avec un signe (ou plus généralement une multiplicité), le degré correspond au nombre d'antécédents. Soit $f : S^n \rightarrow S^n$, et $y \in S^n$. On suppose que y n'a qu'un nombre fini de préimages. Soit V un voisinage de y , soient x_i les préimages et U_i des voisinages de x_i tels que $f(U_i - x_i) \subset V - y$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(U_i, U_i - x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) & & \\
 \swarrow \approx & \downarrow k_i & \downarrow & & \\
 H_n(S^n, S^n - x_i) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n - y) \\
 \nwarrow \approx & \uparrow & \uparrow j & & \\
 & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) &
 \end{array}$$

Les deux isomorphismes sont obtenus par excision. Toujours par excision, on a que $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y))$ est la somme directe des $H_n(U_i, U_i - x_i) \simeq \mathbb{Z}$.

Proposition 13.5. *On a $\deg f = \sum_i \deg f|_{x_i}$.*

Démonstration. On a $p_i k_j = 0$ si $i \neq j$. De plus, par commutativité du triangle, on a $p_i j(1) = 1$. Donc on a $j(1) = \sum k_i(1)$. Grâce au haut du diagramme, $j(1)$ est envoyé sur $\sum \deg f|_{x_i}$. Grâce au bas du diagramme, il est également envoyé sur $\deg f$. D'où le résultat. $\square$

Remarque 13.6. Le résultat peut être généralisé pour toute “variété”. $\blacklozenge$

13.2 CW-complexes

On donne une dernière manière de calculer l'homologie, qui est sans doute la plus puissante. Elle généralise l'homologie des Δ -complexes : il n'y a plus besoin de supposer que l'espace est triangulé, mais seulement décomposé en cellules.

13.3 CW-complexes

Définition 13.7. X admet une structure de CW-complexes s'il existe une filtration $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots$ telle que $X^{(0)}$ est un espace discret, et $X^{(k+1)}$ est obtenu à partir de $X^{(k)}$ par recollement de $(k+1)$ -cellules.

Le sous-espace $X^{(k)}$ s'appelle le k -squelette. Les applications $f_\alpha : D_\alpha^n \rightarrow X$ sont appelées applications caractéristiques.

Exemple 13.8. * Les graphes sont des CW-complexes de dimension 1.

- * Les surfaces.
- * Les espaces projectifs.
- * Les polyèdres.
- * Les surfaces à bord.

$\blacklozenge$

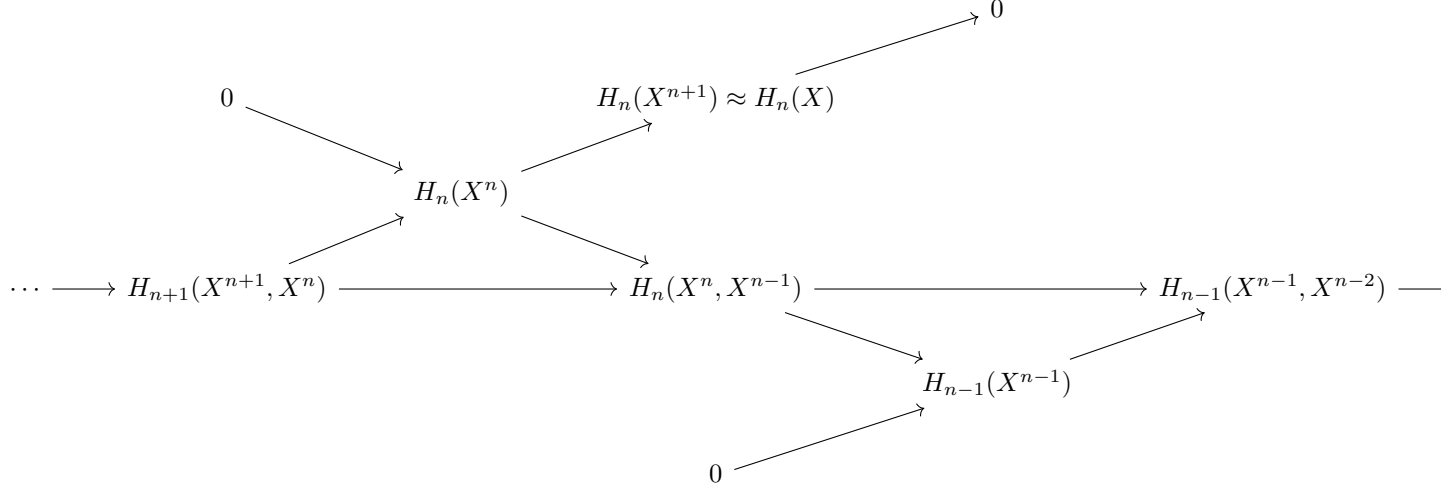
Proposition 13.9. *Une partie est ouverte (resp. fermée) si et seulement si son intersection avec chaque cellule est ouverte (resp. fermée).*

Proposition 13.10. *Une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et contenue dans un nombre fini de cellules.*

Proposition 13.11. *Le quotient topologique $X^{(k)}/X^{(k-1)}$ est un bouquet de sphères.*

13.4 Homologie cellulaire

Soit X un CW-complexe. On peut mettre bout à bout les suites exactes longues des paires :



Théorème 13.12. *L'homologie du complexe ci-dessus est $H_{\bullet}^{CW}(X)$. On a $H_{\bullet}^{CW}(X) \simeq H_{\bullet}(X)$. De plus, l'application de bord prend la forme suivante :*

$$\partial e_{\alpha}^{n+1} = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_{\beta}^n,$$

où $d_{\alpha\beta}$ est le degré de l'application de recollement.

Exemple 13.13. On peut recalculer plus facilement l'homologie de la surface de genre g , ou bien de la variété hypercubique par exemple. $\diamond$

13.5 Caractéristique d'Euler

Définition 13.14. On définit la *caractéristique d'Euler* d'un espace X par $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk} H_i(X)$.

Proposition 13.15. *Si X admet une décomposition cellulaire avec N_i i -cellules, on a $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i N_i$.*

Proposition 13.16. *Si $f : E \rightarrow B$ est un revêtement de degré d , on a $\chi(E) = d\chi(B)$.*