Notes de cours - Surfaces de Riemann

Thomas Blomme

20 novembre 2023

Table des matières

Introduction

Première partie

Définition et constructions

Chapitre 1

Définition et premières propriétés

Le but du cours est de réaliser une étude des surfaces de Riemann du point de vue complexe, ce qui mènera à terme à la démonstration du théorème de Riemann-Roch et des fibrés en droites holomorphes. On commence naturellement par la définition des objets d'étude qui ont trait au sujet. Ceux-cis sont une généralisation naturelle de certaines notions vues en vours d'analyse complexe.

1.1 Généralités

1.1.1 Définition

Définition 1. Une surface de Riemann est un espace topologique X connexe séparé muni d'un atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$, où $\varphi_\lambda : U_\lambda \to V_\lambda \subset \mathbb{C}$ sont des homéomorphismes vers des ouverts de $\mathbb{C}$, et dont les changements de cartes

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu),$$

sont des biholomorphismes entre ouverts de $\mathbb{C}$.

Les φ_λ sont appelés des *cartes*, et la coordonnée dans $\mathbb{C}$ est appelée coordonnée locale. Une surface de Riemann est donc un espace topologique qui ressemble localement à $\mathbb{C}$.

Remarque 2.
- $*$ Cette définition ressemble à la définition de variété différentielle. Pour obtenir cette dernière, la différence est que les applications sont à valeurs dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$ au lieu de $\mathbb{C}$, et on requiert que les changements de cartes soient des difféomorphismes.
- $*$ En rajoutant difféomorphismes à Jacobien positif dans la définition de variété, on obtient la notion de variété orientée.
- $*$ Sous réserve de connaître les fonctions holomorphes en plusieurs variables, on peut également définir la notion de variété complexe pour laquelle les surfaces de Riemann sont en réalité les variétés complexes de dimension 1, autrement dit les courbes.

♦

1.1.2 Fonctions holomorpes et méromorphes

Les surfaces de Riemann sont localement biholomorphes à $\mathbb{C}$ par définition. Ceci permet d'importer certaines notions des objets locaux définis sur $\mathbb{C}$.

Définition 3. Soit X une surface de Riemann et f une fonction définie sur un ouvert $U \subset X$. La fonction f est holomorphe (resp. méromorphe) si pour toute carte $f \circ \varphi_\lambda^{-1} : V_\lambda \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est holomorphe (resp. méromorphe).

L'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert U est noté $\mathcal{O}(U)$, et l'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert U est noté $\mathcal{M}(U)$. Les fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas sur U est lui noté $\mathcal{O}^\times(U)$.

Proposition 4. *Toute fonction holomorphe qui s'annule en un point p peut s'écrire au voisinage de p de la forme $f(w) = w^k$.*

Démonstration. Rappelons du cours d'analyse complexe que toute fonction holomorphe est développable en série entière, ce qui peut se montrer grâce à la formule de Cauchy. Cela permet d'écrire localement (*i.e.* dans une certaine coordonnée)

$$f(z) = \alpha z^k h(z),$$

où $h(0) = 1$. Il est possible de trouver une racine u à h ($u^k(z) = h(z)$), ce qui permet de faire un changement de coordonnée de la forme

$$w(z) = \alpha^{1/k} z u(z).$$

Dans cette nouvelle coordonnée, $f(w) = w^k$. □

Remarque 5. La situation est identique pour les fonctions méromorphes. Ceci peut sembler rentrer en conflit avec la notion de résidu. Ceci est dû au fait que le résidu est associé à ce que nous appellerons une 1-forme, et non pas une fonction. ♦

1.1.3 Applications entre surfaces de Riemann

Après avoir défini les fonctions sur une surface de Riemann, on définit maintenant les applications holomorphes entre surfaces de Riemann, qui seront étudiées dans le cas des surfaces compactes plus en détail plus tard.

Définition 6. Une application continue $f : X \to Y$ entre deux surfaces de Riemann est holomorphe si elle est holomorphe dans les cartes :

$$\varphi_\lambda \circ f \circ \psi_\mu^{-1} : V_\mu \to W_\lambda \text{ est holomorphe.}$$

Un biholomorphisme est un homéomorphisme holomorphe (dont l'inverse est alors également holomorphe). Les surfaces de Riemann sont alors qualifiées d'isomorphes, ou de biholomorphes.

1.1.4 Quelques rappels d'analyse complexe

Comme les définitions consistent à localement se ramener à un ouvert de $\mathbb{C}$ et aux fonctions holomorphes, il est possible d'importer certains résultats d'analyse complexe. On rappelle ici quelques principaux résultats, d'autres seront vus en TD.

Proposition 7. *Soit U un ouvert d'une surface de Riemann, $p \in U$ un point, et $f : U \backslash \{p\}$ une fonction holomorphe bornée. Alors f s'étend en p.*

Démonstration. TD $\square$

Proposition 8. *(principe des zéros isolés) Soient f, g deux fonctions holomorphes définies sur un ouvert $U \subset X$ connexe, qui coïncident sur un sous-ensemble D qui possède un point d'accumulation. Alors $f = g$.*

Proposition 9. *(principe du maximum) Soit f une fonction holomorphe. Si $|f|$ a un maximum local, alors f est constante.*

Proposition 10. *Une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann est ouverte. Si la surface de départ est compact, elle est de plus surjective.*

Corollaire 11. *Une fonction holomorphe définie sur une surface de Riemann compacte est constante.*

1.2 Exemples (simplement connexes) de surfaces de Riemann

1.2.1 Espaces simplement connexes et crash course sur le π_1

Dans ce cours on aura besoin de certaines notions de topologie algébrique. Ces dernières sont définies dans un cadre très général avec des constructions parfois compliquées. Cependant, comme ce cours se limite au cadre des surfaces, il sera parfois possible de les appréhender plus simplement, et on admettra la définition ou certaines propériétés le cas échéant. Le premier concept est celui de *simple connexité*, qui est reliée à la notion de *groupe fondamental*.

- On appelle lacet une application $\gamma : [0; 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Il est possible de concaténer des lacets s'ils partent du même point, et de définir un lacet inverse.
- Soient $f, g \colon X \to Y$ deux applications continue. On appelle homotopie entre f et g une application continue
$$H : X \times [0; 1] \to Y,$$
telle que $H_0 = f$ et $H_1 = g$. La relation "être homotope à" est une reation d'équivalence sur les fonctions. Une homotopie est un chemin dans l'espace des fonctions.
- Un espace est simplement connexe si tout lacet est homotope à un lacet constant.

- Plus généralement, l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en un point muni de la concaténation est un groupe appelé *groupe fondamental* et noté $\pi_1(X, x_0)$.

Exemple 12. Le disque, le demi-plan, le plan sont simplement connexes car ce sont des ouverts convexes de $\mathbb{R}^2$. On peut également montrer que la sphère est simplement connexe, ce qui est légèrement moins évident. (exo) ◊

1.2.2 Exemples

On donne maintenant les principaux (et en fait les seuls) exemples de surfaces de Riemann simplement connexes. On détermine également leur groupe d'automorphisme.

∗ Le plan $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann. Les fonctions holomorphes dessus sont appelées fonctions *entières*. On a également le théorème de Liouville, qui garantit qu'une fonction entière à croissance polynomiale est en fait un polynôme. On a de plus la proposition suivante.

  Proposition 13. *Le groupe des automorphismes de* $\mathbb{C}$ *est :*

  $$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\}.$$

∗ Tout ouvert de $\mathbb{C}$ est une surface de Riemann. Le demi-plan de Poincaré

  $$\mathcal{H} = \{z : \mathrm{Im} z > 0\},$$

  et le disque D en sont des exemples. Le demi-plan de Poincaré est biholomorphe au disque par l'application

  $$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

  Le théorème de Liouville montre qu'il n'existe pas de biholomorphisme avec $\mathbb{C}$: une application $f : \mathbb{C} \to D$ est bornée, donc nécessairement constante.

  Proposition 14. *Les automorphismes de D sont appelées transformations de Möbius et forment un groupe. Ils sont de la forme*

  $$z \mapsto \lambda \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

  Une fois importées sur $\mathcal{H}$, on voit que le groupe d'automorphisme de $\mathcal{H}$ est en fait $PSL_2(\mathbb{R})$, qui agit par homographies : $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

  Remarque 15. Le théorème d'uniformisation de Riemann garantit que tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et distinct de $\mathbb{C}$ est en fait biholomorphe au demi-plan de Poincaré. ♦

∗ Donnons un dernier exemple qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$. Cet exemple est même compact : la sphère de Riemann, ou droite projective. On munit S^2 des deux projections stéréographiques :

  $$\varphi_{N/S}(x, y, z) = \frac{x \pm iy}{1 \mp z} \in \mathbb{C}.$$

Cela fournit deux cartes qui identifie la sphère pivée d'un de ses pôles avec $\mathbb{C}$. On vérifie que pour un point de la sphère,

$$\frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy},$$

de sorte que l'application de changement de carte est en fait $w \mapsto \frac{1}{w}$, qui est bien biholomorphe. On a donc bien une surface de Riemann.

Remarque 16. On verra qu'il s'agit de la seule surface de Riemann compacte simplement connexe. ♦

Proposition 17. *Une fonction méromorphe $f : X \to \mathbb{C}$ est en fait une application holomorphe $f : X \to \mathbb{C}P^1$.*

Il est également possible de construire $\mathbb{C}P^1$ comme la droite projective $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$. Les automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ forment un groupe isomorphe à $PGL_2(\mathbb{C})$, qui agit par homographies. Les automorphismes sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Plus généralement, les applications holomorphes de $\mathbb{C}P^1$ dans lui-même sont les fractions rationnelles.

Remarque 18. Par définition, une fonction holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$ est en fait une application holomorphe entre les surfaces de Riemann X et $\mathbb{C}$. De même, une fonction méromorphe est en fait une application méromorphe entre X et $\mathbb{C}P^1$. ♦

Le théorème d'uniformisation affirme que ces exemples sont en fait les seuls surfaces de Riemann simplement connexes. Via la théorie des revêtements (topologie algébrique), il est possible d'en déduire que toute surface de Riemann est un quotient de la sphère, du plan ou du demi-plan. Remarquons qu'il n'y a pas de quotient de la sphère car aucun automorphisme n'est sans point fixe.

1.3 Structures conformes

Un théorème de Gauss fournit une large classe d'exemples sur les surfaces de Riemann : une métrique riemannienne analytique permet de définir une structure de surface de Riemann. L'interaction entre les deux est au coeur de la théorie de Hodge qui sera abordée plus tard.
On appelle carte conforme un système de coordonnées locales où la métrique prend la forme $m(x,y)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. En d'autres termes, on ne s'intéresse qu'à la mesure des angles, pas des longueurs.

Théorème 19. *(Gauss) Soit g une métrique Riemannienne analytique réelle définie au voisinage d'un point p sur une surface analytique. Alors il existe une carte conforme définie sur un voisinage ouvert de p et à valeurs dans le plan euclidien.*

Démonstration. Dans le cas lorentzien, on a les directions isotropes. Dans le cas euclidien, on complexifie pour avoir des directions isotropes. La structure complexe est donnée par la rotation d'angle $\pi/2$. $\square$

Une transformation conforme est une transformation dont la différentielle est une similitude. On retombe sur les équations de Cauchy-Riemann qui caractérisent les fonctions holomorphes dans le cas des ouverts de $\mathbb{C}$.

Chapitre 2

Les courbes elliptiques

Dans ce chapitre on s'intéresse à une grande famille de surfaces de Riemann pour avoir de nouveaux exemples à considérer. Le théorème d'uniformisation garantit qu'il n'y a pas d'exemples simplement connexes autres que $\mathbb{C}, D$ et $\mathbb{C}P^1$. L'existence du revêtement universel montre qu'il faut donc regarder les quotients de ces derniers par un sous-groupe du groupe d'automorphisme agissant sans point fixe. Comme les automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ ont tous des points fixes, on regarde les quotients du plan $\mathbb{C}$. Pour obtenir un quotient compact, il faut considérer un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$.

2.1 Définition des courbes elliptiques

On rappelle qu'un réseau dans un espace vectoriel réel de dimension n est un sous-groupe discret isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Définition 20. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ un réseau. La courbe elliptique associée est le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$. Ce dernier possède une structure de surface de Riemann héritée de $\mathbb{C}$. La projection canonique est notée $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$.

Ces surfaces sont topologiquement des tores et sont donc tous homéomorphes (à $(S^1)^2$) mais pas forcément isomorphes comme surfaces de Riemann : ils ne sont pas forcément holomorphiquement équivalents. On a en fait la propriété suivante qui décrit les tores équivalents.

Proposition 21. *Les courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda_1$ et $\mathbb{C}/\Lambda_2$ sont isomorphes si et seulement si il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda_1 = k\Lambda_2$. Autrement dit, il existe un automorphisme de $\mathbb{C}$ qui envoit Λ_1 sur Λ_2.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Réciproquement, supposons qu'il existe $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda_1 \to \mathbb{C}/\Lambda_2$. On a par composition $\varphi \circ \pi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda_2$. Il est possible de *relever* l'application en $\widetilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est alors de la forme $f(z) = az + b$ et vérifie $f(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$. Le morphisme est donc le passage au quotient d'une application linéaire, ce qui permet de conclure. □

On a en fait montré plus généralement qu'une application entre deux courbes elliptiques est nécessairement le passage au quotient d'une application affine.

En composant par un automorphisme de $\mathbb{C}$ convenablement choisi, il est possible de normaliser le réseau de sorte que $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Im}\tau > 0$. Le nombre complexe τ est alors défini modulo les changement de base du réseau, *i.e.* modulo l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$: les réseaux définis par τ et $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ sont isomorphes, reliés par la multiplication par $c\tau + d$.

Remarque 22. Grâce à la structure de groupe de $\mathbb{C}$, les courbes elliptiques sont également des groupes abéliens. Toutefois, cela demande de spécifier un point sur la courbe qui sera alors le neutre de la loi. ♦

2.2 Fonctions elliptiques

On a vu que les fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann étaient les fractions rationnelles. Tout comme sur la sphère, à cause de la compacité, les seules fonctions holomorphes sont les constantes. On s'intéresse maintenant aux fonctions méromorphes sur les courbes elliptiques, *i.e.* les fonctions méromorphes Λ-périodiques sur $\mathbb{C}$.

2.2.1 Disgression historique

Au XIXème siècle, les analystes sont en quête de nouvelles fonctions, hors du bestiaire de fonctions déjà connues : fonctions rationnelles, polynomiales et algébriques (même multiformes, *i.e.* qui peuvent prendre plusieurs valeurs). Pour en trouver de nouvelles, on peut intégrer des fonctions déjà connues, par exemple le logarithme, obtenu comme primitive de $\frac{1}{x}$.

Euler, Gauss, Legendre, Abel, Jacobi s'attaquent aux "intégrales abéliennes" de la forme $\int R(x,y)\mathrm{d}x$, où R est rationnelle, et y fonction algébrique de x. Par exemple

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Cette formule ressemble à une définition d'arcsinus. On a donc une formule d'addition due à la formule d'addition du sinus. Guidé par ceci, Euler démontre

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}},$$

où $z = \frac{x\sqrt{1-y^4}+y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}$, ce qui peut rappeler la formule du sinus d'une somme, qui est liée à la structure de groupe sur le cercle unité : avec un 2 à la place d'un 4, on obtient arcsin. Gauss a alors l'idée d'inverser la fonction pour définir sinlemn. Il est alors hésitant mais tenté de mettre des valeurs complexes pour x. Il montre alors que la fonction possède deux périodes : $2\varpi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$ et $2i\varpi$. Ceci suggère que la fonction est naturellement définie sur le quotient $\mathbb{C}/2\varpi(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, pourvu que l'on s'autorise à évaluer des valeurs complexes et non pas seulement imaginaires pures. Abel et Jacobi étudieront ensuite les intégrales plus générales du type

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

et ont indépendemment la même idée de voir x comme fonction de u. Ils établissent que x est une fonction méromorphe doublement périodique de u.
Jacobi introduit ensuite les fonctions θ pour fabriquer des fonctions méromorphes doublement périodiques.

2.2.2 Constructions et théorème d'Abel-Jacobi

Les fonctions sur une courbe elliptiques peuvent être vues comme des fonctions Λ-périodiques sur $\mathbb{C}$. La construction de fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann est particulièrement simple grâce à l'existence déjà connue des fractions rationnelles. Ceci est plus compliqué dans le cas des courbes elliptiques car on ne dispose pas de ce vivier de fonctions basiques. Il faut en construire un. On peut d'abord construire la fonction σ de Weierstrass :

$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}}.$$

Le premier terme est là pour que la fonction s'annule en les points du réseau, et l'exponentielle là pour faire converger le produit. On vérifie aisément la convergence sur tout compact de $\mathbb{C}$, ce qui produit une limite holomorphe. Cette fonction n'est hélas (et évidemment) pas périodique, on peut néanmoins montrer l'existence de $\epsilon_\lambda = \pm 1$ et c_λ tels que

$$\sigma(z + \lambda) = \epsilon_\lambda e^{c_\lambda (z - \frac{\lambda}{2})} \sigma(z).$$

Des quotients de σ permettent alors de construire des fonctions méromorphes ayant des zéros et pôles en des points donnés. Il n'est cependant pas possible de choisir arbitrairement ces derniers. On a le théorème suivant qui sera réinterprété plus tard quand nous verrons les diviseurs.

Théorème 23 (Abel-Jacobi pour les courbes elliptiques)**.** *Soit (a_i) un nombre fini de points de $\mathbb{C}/\Lambda$, chacun pondéré par un nombre n_i. Il existe une fonction méromorphes ayant un pôle ou zéro d'ordre n_i en a_i si et seulement si $\sum n_i = 0 \in \mathbb{Z}$ et $\sum n_i a_i = 0 \in \mathbb{C}/\Lambda$. Une telle fonction est unique à un scalaire près*

Remarque 24. Ce théorème dénote par rapport à la situation sur $\mathbb{C}P^1$ où seule la condition sur $\sum n_i$ importe. ♦

Démonstration. Les conditions sont nécessaires en utilisant le théorème des résidus pour $\frac{f'}{f}$ et $z\frac{f'}{f}$. Elles sont suffisantes car il suffit de considérer

$$f(z) = \prod \sigma(z - \widetilde{a_i})^{n_i},$$

où les relevés vérifient $\sum n_i \widetilde{a_i} = 0$. (il faut peut-être séparer $n_i = m_i + 1$) On vérifie alors que la fonction est bien périodique. □

Remarque 25. La somme formelle $\sum n_i(a_i)$ est appelée diviseur. Un diviseur est dit *principal* s'il existe une fonction méromorphe dont c'est le diviseur, *i.e.* les pôles et zéros comptés avec multiplicité. ♦

2.3 La fonction $\wp$ de Weierstrass

Le processus ci-dessus permet de construire de nombreuses fonctions sur les courbes elliptiques, mais pas forcément de les appréhender simplement. On cherche à définir la fonction méromorphe la plus simple possible sur $\mathbb{C}/\Lambda$. Il n'est pas possible d'autoriser un seul pôle, sinon on otiendrait une application vers $\mathbb{C}P^1$ qui serait de degré 1 et mènerait à un biholomorphisme, ce qui est impossible (Exercice : montrer qu'une fonction holomorphe $f : X \to \mathbb{C}P^1$ qui possède un unique pôle est un biholomorphisme. On pourra montrer que la fonction est injective). On cherche donc une fonction avec un pôle double.

Proposition 26. *il existe une unique fonction elliptique, notée $\wp$, qui a un pôle double en* 0 *et dont le développement s'écrit*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + h(z), \text{ où } h(0) = 0.$$

Démonstration. Si l'on avait deux telles fonctions, la différence serait holomorphe, donc constante, d'où l'unicité. Pour l'existence, il suffit de considérer

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2},$$

dont on vérifie la convergence et la périodicité. □

Remarque 27. La fonction est paire car $\wp(-z)$ vérifie les même conditions. ♦

Proposition 28. *La fonction $\wp$ satisfait l'équation différentielle suivante :*

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

où $g_2 = 60 \sum \frac{1}{\lambda^4}$ *et* $g_3 = 140 \sum \frac{1}{\lambda^6}$.

Démonstration. La différence entre les deux termes est une fonction méromorphe, et les coefficients ont été choisis de manière à supprimer la partie polaire en 0, ce qui assure qu'elle st en fait holomorphe, donc constante. □

La fonction de Weierstrass fournit une application

$$z \in \mathbb{C}/\Lambda \longmapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \in \mathbb{C}P^2,$$

dont l'image vérifie l'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

qui est l'équation d'une cubique. Un théorème de géométrie algébrique garantit alors que le corps des fonctions sur la courbe est en fait $\mathbb{C}(x, y)/(y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3)$. On en déduit que $\wp$ et $\wp'$ génèrent le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}/\Lambda$.

2.4 Fonctions θ

Il est également possible de définir d'autres fonctions que la fonction σ de Weierstrass comme fonction (quasi-)périodique auxiliaire pour construire des fonctions méromorphes. Ces dernières sont appelées fonction θ. Elles sont relées aux sections des fibrés en droite sur les courbes elliptiques.

On ne s'apesantira pas trop sur ces fonctions mais elles forment une partie importante de l'étude des courbes elliptiques et plus généralement des *variétés abéliennes*, dont les courbes abéliennes sont les représentants de dimension 1.

Chapitre 3

Plus d'exemples et de constructions

Nous avons déjà étudié plusieurs surfaces de Riemann. On donne dans ce chapitre d'autres constructions qui permettent de construire plus de surfaces de Riemann.

3.1 Courbes algébriques

3.1.1 Courbes affines

Une manière extrêmement générale d'obtenir une surface de Riemann est de considérer le lieu des points complexes d'une courbe algébrique. Commençons par les courbes affines dans $\mathbb{C}^2$. On considère une équation polynomiale $P(x, y)$ (ou plus généralement holomorphe si l'on connaît les fonctions holomorphes de plusieurs variables). On suppose qu'en chaque point, l'une des dérivées partielles ne s'annule pas. On peut alors appliquer le théorème d'inversion locale, ou bien des fonctions implicites qui donne alors des cartes pour $\{P = 0\}$. Le lieu des zéros s'écrit localement $\{(z, \varphi(z))\}$, et la projection sur la première variable donne un biholomorphisme vers $\mathbb{C}$.

Exemple 29. $\ast$ Le lieu des zéros de $x + y + 1 = 0$ est une droite.

- $\ast$ Le lieu des zéros de $x^2 + y^2 = 1$.
- $\ast$ Le lieu des zéros de $y^2 = x^3 - x$.
- $\ast$ Le lieu des zéros de $y^2 = x^3 - x^2$ n'est pas une surface de Riemann. On a la présence d'un point double en 0. Mais il est possible de la paramétrer par $\mathbb{C}$. On a pris ce que l'on appelle la *normalisation*.

$\Diamond$

Ces surfaces de Riemann ne sont cependant pas compactes. Pour obtenir des courbes compactes, il faut considérer par exemple le plan projectif $\mathbb{C}P^2$ et les équations homogènes.

3.1.2 Courbes projectives

On se place dorénavant dans le plan projectif $\mathbb{C}P^2$, qui est construit comme le quotient $\mathbb{C}^3 - 0/\mathbb{C}^*$. C'est un espace topologique compact. Un point est noté en utilisant les coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : z_2]$. Ce dernier est recouvert pas trois *cartes affines* toutes isomorphes à $\mathbb{C}^2$, obtenues en prenant l'une des coordonnées égales à 1. On peut à chaque fois voir $\mathbb{C}P^2$ comme la réunion de l'une des cartes affines avec une droite à l'infini, où l'une des coordonnées s'annule.

On va maintenant définir des courbes dans $\mathbb{C}P^2$. Soit P un polynôme homogène de degré d en les variables, *i.e.* qui s'écrit

$$\sum_{i_0+i_1+i_2=d} a_{i_0 i_1 i_2} Z_0^{i_0} Z_1^{i_1} Z_2^{i_2}.$$

De manière équivalente, on doit avoir pour tout λ,

$$P(\lambda Z) = \lambda^d P(Z).$$

L'équation $\{P = 0\}$ définit un sous-ensemble fermé (donc compact) de $\mathbb{C}P^2$. Dans la carte $Z_0 = 1$, cet ensemble est défini par l'équation affine $P(1, z_1, z_2) = 0$. Si on suppose que ce polynôme non-homogène satisfait les conditions de la section précédente dans chacune des cartes, il définit donc une surface de Riemann. Il est possible de détecter la condition sur les dérivées partielles le polynôme homogène.

Proposition 30. *Si* 0 *est la seule solution de*

$$\frac{\partial P}{\partial Z_1} = \frac{\partial P}{\partial Z_2} = \frac{\partial P}{\partial Z_3} = 0,$$

alors $\{P = 0\}$ *est une surface de Riemann.*

Démonstration. Commençons par observer que l'on a l'identité d'Euler $\sum Z_i \partial_i P = d \cdot P$, de sorte qu'une solution du système appartient automatiquement à la courbe. Soit ensuite un point avec une coordonnée non-nulle, par exemple Z_0. Grâce à l'équation, on ne peut pas avoir $\partial_1 P = \partial_2 P = 0$: cela force $\partial_0 P = 0$, et il n'y a pas de solutins non nulle par hypothèse. On a donc par exemple $\partial_2 P \neq 0$. Dans la carte affine, la dérivée est non nulle et on peut appliquer le résultat dans le cadre affine. □

Exemple 31. L'équation $aX + bY + cZ = 0$ donne une droite projective, surface de Riemann biholomorphe à la sphère de Riemann. une équation de degré 2 donne une conique, également biholomorphe à la sphère de Riemann. Une équation de degré 3 peut être mise sous la forme

$$y^2 z = x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3,$$

la version homogène de l'équation de Weierstrass qui donne des courbes elliptiques. ◊

3.2 Quotients

Une autre manière de construire des surfaces de Riemann est de quotienter des surfaces de Riemann munies de l'action d'un groupe. Comme pour les espaces topologiques, le quotient d'une surface de Riemann par l'action libre et totalement discontinue d'un groupe donne au quotient un structure de surface de Riemann, et l'application quotient est alors un revêtement. Ceci est également vrai dans le cas des variétés différentielles ou complexes. Dans le cas des surfaces de Riemann, la situation est plus sympathique car il est possible d'autoriser l'existence de points fixes, qui donnent ordinairement lieu à des singularités du quotient.

Proposition 32. *Soit X une surface de Riemann et G un groupe discret qui agit holomorphiquement et proprement. Alors l'ensemble quotient X/G est muni d'une structure de surface de Riemann et une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ est holomorphe.*

Exemple 33. L'exemple classique, et en fait le plus générique est le quotient du dique D par l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ via les racines de l'unité. L'application $z \mapsto z^n$ induit un isomorphisme $D \simeq D/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Le quotient est lisse bien que l'action ne soit pas libre. ♢

Démonstration. Considérons un point $\overline{p} = \pi(p)$ dans le quotient X/G, et G_p le stabilisateur de p. Si le stabilisateur est trivial, l'application quotient est un homéomorphisme local et on a bien une structure de surface de Riemann.
Remarquons ensuite que l'ensemble des points à stabilisateur non trivial est discret grâce au principe des zéros isolés. Soit p un point à stabilisateur non trivial. Montrons que p possède un voisinage simplement connexe O stabilisé par G_p mais tel que $gO \Cap O = \emptyset$ pour tout $g \notin G_p$. On part d'un voisinage qui vérifie la seconde condition. On se ramène donc localement à $\mathbb{C}$. On prend ensuite U simplement connexe, puis O la composante connexe de $\bigcup_{G_p} gU$. Cet ouvert est simplement connexe par le théorème de Jordan (car toute courbe de Jordan a son intérieur contenu dans l'ouvert.
D'après le théorème de représentation conforme, O est biholomorphe au disque unité. Dans cette carte, G_p est un groupe d'automorphismes qui fixe 0, donc un sous-groupe du groupe des rotations. On est donc ramené au cas de l'exemple, ce qui conclut. □

Exemple 34. Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Par exemple $PSL_2(\mathbb{Z})$. L'action de $PSL_2(\mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ est propre.
Un domaine fondamental de l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$ est

$$D = \{\tau \in \mathcal{H} : |\tau| \geqslant 1 \text{ et } |\mathrm{Re}\tau| \leqslant 1/2\}.$$

On a

$$\mathrm{Im}(g \cdot \tau) = \frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}.$$

On peut donc trouver un élément dans la classe d'équivalence qui ait sa partie imaginaire maximale, et sa partie réelle dans l'intervalle demandé. Comme $\mathrm{Im}(-1/\tau) = \mathrm{Im}\tau/|\tau|$, on a $|\tau| \geqslant 1$. Si τ est un élément et g vérifie, $g \cdot \tau \in D$, on peut supposer $\mathrm{Im}(g\tau) \geqslant \mathrm{Im}\tau$, *i.e.* $|c\tau + d| \leqslant 1$. C'est impossible si $|c| \geqslant 2$.

- Si $c = 0$, $d = \pm 1$, g est l'identité ou bien la translation par ± 1.
- Si $c = 1$, on a $d = 0$ ou bien $\tau = j, -j^2$ auquel cas $d = 0, 1$ (resp. $0, -1$). On trouve ensuite $b = -1$ puisque $ad - bc = 1$. En considérant la partie réelle, on trouve $a = 0$ sauf dans le cas $\tau = j, -j^2$ auquiel cas on a $a = 0, \pm 1$.

- Si $c = -1$, on se ramène au cas précédent avec $-g$.

On a donc deux points singuliers : i où le stabilisateur est d'ordre 2, et j où le stabilisateur est d'ordre 3. $\Diamond$

3.3 Surface de Riemann d'un germe de fonction

On présente une dernière manière de construire des surfaces de Riemann, qui sint une des raisons historiques de leur apparition, qui est liée au prolongement analytique : on considère une série entière à rayon de convergence fini. Par exemple $\sum_0^\infty z^n$, dont le rayon de convergence est 1. On reconnaît là le dévelppement en série de la fonction $\frac{1}{1-z}$, ce qui permet de définir la fonction sur le plan percé. Ceci n'est pas forcément évident partout, comme le montre par exemple l'étude de la série du logarithme.

Soit $f : (\mathbb{C}, x_0) \to \mathbb{C}$ le germe d'une fonction holomorphe, *i.e.* une série entière avec rayon de convergence positif. Nous allons associer à f une surface de Riemann X et une projection holomorphe vers $\mathbb{C}$ sur laquelle le germe f peut être prolongé analytiquement. En d'autres termes, on cherche à étendre f en explorant les possibilités.

Pour ce faire, on considère l'espace des germes $\mathcal{G} = \{(x, f) | f \text{ germe en } x\}$. On le munit de la topologie engendrée par les ouverts de la forme

$$\mathcal{U}(U, \varphi) = \{(x, \varphi_x)\},$$

où U ouvert de $\mathbb{C}$ et φ une fonction holomorphe sur U dont le germe en x est noté φ_x. La projection vers $\mathbb{C}$ est continue et induit des homéomorphismes en restriction aux $\mathcal{U}(U, \varphi)$.

Lemme 35. *$\mathcal{G}$ est séparé.*

Démonstration. Deux germes en des points distincts sont séparés par la projection vers $\mathbb{C}$. De plus, les ouverts $\mathcal{U}(U, \varphi)$ et $\mathcal{U}(U, \psi)$ sont disjoints : s'ils contenaient un germe commun, les fonctions coïncideraient sur un ouvert et seraient donc égales. $\square$

L'espace $\mathcal{G}$ est donc naturellement une surface de Riemann non connexe.

Définition 36. La surface de Riemann associée à f est la composante connexe de $\mathcal{G}$ associée à son germe.

Cette construction peut paraître un peu abstraite car elle fait usage de la connexité pour définir un prolongement maximal. Voyons ce que cela donne sur un exemple.

Exemple 37. $*$ La surface de Riemann associée au logarithme, en prenant le germe de $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ en $z = 1$. La surface de Riemann associée est biholomorphe à $\mathbb{C}$ via l'exponentielle :

$$x \in \mathbb{C} \longmapsto (e^x, x + \sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n} (z - e^x)^n).$$

$*$ Pour la fonction racine, la surface est biholomorphe à $\mathbb{C}^*$ via

$$x \in \mathbb{C}^* \longmapsto (x^2, x + \frac{1}{2}\left(\frac{z - x^2}{x}\right) + \cdots).$$

$\Diamond$

Deuxième partie

Aspects topologiques des surfaces de Riemann

Chapitre 4

Topologie des surfaces

Dans cette partie on verra quelques outils de topologie algébrique et de géométrie différentielle afin d'étudier plus avant les surfaces de Riemann. Ces derniers interagissent avec la structure de variété complexe des surfaces de Riemann. Dans ce chapitre particulier on verra des concepts de topologie algébrique

4.1 Surfaces orientables et triangulables

4.1.1 Orientabilité

Les surfaces de Riemann sont des variétés complexes. Il est possible d'oublier la structure complexe et de les considérer comme variétés différentielles réelles. On a alors la proprosition suivante.

Proposition 38. *Une surface de Riemann est orientable.*

Démonstration. Les fonctions holomorphes sont des transformations conformes qui préservent donc l'orientation. Une surface de Riemann est donc naturellement munie d'une orientation induite par celle de $\mathbb{C}$. □

4.1.2 Triangulabilité

On cherche maintenant à *trianguler* ces surfaces, ce qui signifie partitionner la surface en triangles. On note

$$\Delta^n = \{t \in \mathbb{R}_+^{n+1} | \sum_0^n t_i = 1\},$$

le simplexe de dimension n. On appelle 2-simplexe d'une surface X est une injection continue $\Delta^2 \to X$.

Définition 39. Une surface X est triangulable s'il existe des 2-simplexes dont les images recouvrent X et tels que

(i) Si P n'est pas sur une arête, il appartient à un unique triangle qui en est un voisinage.

(ii) Si P est sur une arête mais pas un sommet, il appartient à exactement deux triangles qui s'intersectent le long de l'arête et la réunion des triangles est un voisinage du point.

(iii) Si P est un sommet, il appartient à un nombre fini de triangles $t_1, \ldots, t_k$, leur réunion est un voisinage de P, et t_i et t_{i+1} ont exactement une arête en commun.

Il est possible d'utiliser l'existence de fonctions méromorphes pour montrer le résultat suivant.

Proposition 40. *Toute surface de Riemann est triangulable.*

Démonstration. On utilise l'existence d'une fonction méromorphe et d'une triangulation de la sphère en utilisant les valeurs critiques, puis on la tire en arrière. □

Réciproquement, on a la proposition suivante.

Proposition 41. *Toute surface triangulable et orientable peut-être munie d'une structure de surface de Riemann.*

Remarque 42. Dans la définition, on demande aux applications depuis les simplexes d'être injectif. Cela force les triangulations à comporter beaucoup de triangles. On s'autorisera à utiliser des triangulations dans le cadre des Δ-complexes afin d'éviter d'avoir trop de triangles. (voir Hatcher) Les applications sont alors seulement injectives sur l'intérieur du simplexe considéré, et non plus tout le simplexe. ♦

4.2 Classification topologique des surfaces compactes orientables

On considère un polygone ayant un nombre pair de côtés, identifiés deux à deux. Le recollement de ces côtés donne lieu à une structure de surface sur le quotient. Ce dernier est orientable si les arêtes sont recollées dans des sens opposés. On peut construire de manière simple une surface à g trous comme quotient du $4g$-gone en identifiant les arêtes d'une certaine manière.

Réciproquement, on va montrer que pour toute surface compacte orientable triangulée, il est possible de la présenter de cette forme, ce qui permet de classifier les surfaces orientables. On encode le recollement d'un polygone par un mot dont les caractères sont associés aux arêtes au bord.

Définition 43. On appelle forme normale un symbole du type aa^{-1} si $g = 0$ ou

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

Les symboles correspondent à une identification des côtés d'un polygone. On va montrer qu'en partat d'un recollement quelconque, en changeant la triangulation,il est possible d'obtenir une forme normale.

Proposition 44. *Toute surface triangulée peut s'exprimer comme quotient d'un polygone sous forme normale.*

Démonstration. On part donc d'une surface triangulée. On va changer la triangulation pour obtenir une forme normale.

- Première étape : on recolle les triangles entre eux de manière à obtenir un polygone. Le fait que le recollement soit une surface garantit que chaque arête apparaît deux fois, et le côté orientable assure qu'une arête apparaît deux fois dans des sens opposés.
- Deuxième étape : on se ramène au cas où il n'y a qu'un unique sommet. Si a est une arête de p à $q \neq p$, dans le mot apparaît $ab \cdots b^{-1}$. On note r l'autre extrémité de b. Alors, on coupe le long de pr et on recolle b à b^{-1}. Cette opération remplace un q par un p. Par récurrence, on peut supprimer toutes les lettres autres que p.
- Troisième étape : on supprime les aa^{-1} en recollant les côtés.
- Quatrième étape : à l'issue des premières étapes, on voit que pour chaque arête, il existe un autre côté b tels qu'ils soient enchaînés : ils apparaissent dans l'ordre $aba^{-1}b^{-1}$. En effet, sinon on aurait $aWa^{-1}W'$ où W et W' sont à supports disjoints. Mais dans ce cas il y aurait plusieurs sommets, ce qui n'est plus le cas. Quitte à couper/coller deux fois, on peut supposer que les quatre se suivent, et on prcède alors par induction.

□

4.3 Homologie et cohomologie simpliciale

On introduit un outil fondamental en topologie algébrique : l'homologie. Les espaces topologiques sont munis de deux homologies particulières a priori distinctes : l'homologie simpliciale, définie à l'aide de triangulation et pour laquelle il est possible de réaliser des calculs, et l'homologie singulière, définie abstraitement et qui permet de démontrer des propriétés générales. Un résultat important est que ces deux homologies coïncident. On donne ici une manière de calculer à l'aide des triangulations, et on admettra certaines propriétés liées à l'homologie singulière.

4.3.1 Groupes d'homologie

On considère donc une surface triangulée, ce qui signifie qu'elle est décomposée en triangles. On a donc le complexe suivant :

$$0 \to C_2 \to C_1 \to C_0 \to 0,$$

où C_2 est généré par les triangles, C_1 par les arêtes, et C_0 par les sommets. On dispose d'un opérateur de bord qui à chaque triangle associe son bord. On définit les groupes d'homologie de la surface par

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = \ker \partial_i / \mathrm{Im} \partial_{i+1}.$$

On admet que ces groupes ne dépendent en fait pas de la triangulation choisie.

On a $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ car la surface est connexe. Le groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$ peut être vu comme le groupe des boucles sur la surface. On admet également que si $f : X \to Y$ est une application continue, on obtient un morphisme de groupes

$$f_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \to H_1(Y, \mathbb{Z}).$$

Exemple 45. Les groupes d'homologie d'une surface à g trous est $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z}$. On en calculera certains en TD. ◊

4.3.2 Caractéristique d'Euler

Définition 46. Soit X une surface de Riemann compacte triangulée. On définit sa caratéristique d'Euler par

$$\chi(X) = V - A + F.$$

La caractéristique d'Euler s'avère ne pas dépendre de la triangulation choisie. Elle peut aussi être exprimée à l'aide des rangs des groupes d'homologie $b_i(X) = \mathrm{rg} H_i(X)$, appelés nombres de Betti :

$$\chi(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) = 2 - 2g.$$

Le rang du premier groupe d'homologie est $2g$, où g est le genre de la surface.

Exemple 47.
- ∗ La sphère de Riemann est de genre 0.
- ∗ Les courbes elliptiques sont de genre 1.
- ∗ La surface à g trous est de genre g.

◊

En dualisant le complexe avant de prendre le quotient $\ker / \mathrm{Im}$, on obtient les groupes de cohomologie.

4.4 Revêtements

Définition 48. Une application $p : E \to B$ est un revêtement si tout point de B admet un voisinage U tel que $p^{-1}(U)$ s'écrit $\bigsqcup U_i$, et $p|_{U_i}$ est un homéomorphisme vers U.

Remarque 49. Un revêtement est en particulier un homéomorphisme local, mais la réciproque est fausse, considérer par exemple $]0;1[\hookrightarrow \mathbb{R}$. Par contre, un homéomorphisme local *propre* est un revêtement. ♦

Remarque 50. Les revêtements d'un espace sont en relation avec les sous-groupes du groupe fondamental pour les espaces "raisonnables", *i.e.* séparés, calca et slsc. On renvoie à un cours de topologie algébrique pour plus de détails. ♦

Tout espace semi-localement simplement connexe possède un revêtement *universel*, *i.e.* qui est simplement connexe.

Comme l'espace total d'un revêtement est localement homéomorphe à sa base, il est possible d'importer toute structure locale de la base vers l'espace total. C'est le cas d'une structure de surface de Riemann.

Exemple 51.
- ∗ Le revêtement universel de $\mathbb{R}P^2$ est S^2.
- ∗ Le revêtement universel du tore est $\mathbb{R}^2$. Le revêtement d'une courbe elliptique est donc $\mathbb{C}$.

◊

Théorème 52. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, et γ un chemin dans B. Alors pour tout relèvement de $\gamma(0)$, il existe un unique relèvement $\widetilde{\gamma}$ partant de $\widetilde{\gamma}(0)$.*

On a de plus l'action de monodromie.

Exemple 53. Un polynôme donne un revêtement de $\mathbb{C} - \{P' = 0\} \to \mathbb{C} - P(\{P' = 0\})$. C'est en effet un homéomorphisme local propre. $\Diamond$

Il est possible de tirer en arrière une triangulation, ce qui permet de montrer que pour un revêtement (entre surfaces de Riemann compactes) :

$$\chi(E) = d\chi(B),$$

ce qui est un cas simple de la formule de Riemann-Hurwitz.

Chapitre 5

Géométrie différentielle des surfaces

On adopte maintenant un point de vue différentiel sur les surfaces de Riemann, qui sont des variétés différentielles de dimension 2. On définit notamment la notion de fibré vectoriel afin de définir la notion de forme différentielle avant d'étudier les relations avec la structure complexe.

5.1 Fibrés vectoriels

On considère une variété différentielle X.

Définition 54. Un fibré vectoriel de dimension n sur une variété X est la donnée d'un atlas $(U_i)_{i\in I}$ de X et d'applications de changements de carte $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation de cocycle :

$$g_{ij} = g_{ji}^{-1},\ g_{ij}g_{jk}g_{ki} = \mathrm{id}.$$

Un fibré de dimension 1 est appelé fibré en droites. On peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans la définition. En fait, dans chaque ouvert U_i on dispose de coordonnées sur la fibre vectorielle. La fonction g_{ij} correspond au changement de coordonnées obtenu en passant dans la carte relative à U_i plutôt que U_j. On s'intéressera dans la suite particulièrement aux fibrés en droites complexes, pour lesquels on a en réalité $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Le fibré est dit holomorphe si les g_{ij} sont holomorphes.

Définition 55. On considère deux fibrés donnés par des cocycles g et g' pour un atlas commun. Un morphisme de fibrés est la donnée d'une application $\varphi_i : U_i \to \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ telles que $\varphi_i g_{ij} = g'_{ij}\varphi_j$.

En particulier, deux fibrés sont isomorphes s'ils diffèrent d'un cobord : $h_i : U_i \to GL_n(\mathbb{R})$.

Définition 56. Une section d'un fibré vectoriel est la donnée d'applications $s_i : U_i \to \mathbb{R}$ telles que $g_{ij}s_j = s_i$.

Exemple 57.

* On a le fibré trivial.
* Le fibré tangent est donné par le cocycle $g_{ij} = \mathrm{d}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$, où $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ sont les cartes de l'atlas donnant la variété.

* Le fibré cotangent est le dual du fibré tangent : $\mathrm{Hom}(TX, \mathbb{R})$, il est donné par le cocycle $g_{ij} = (\mathrm{d}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^T)^{-1}$
* Dans le cas d'une surface de Riemann, la multiplication par i donne un endomorphisme du fibré tangent, noté J et appelé structure presque complexe. Le morphisme commute bien au cocycle car ceux-cis sont holomorphes, donc leur différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

$\Diamond$

5.2 Formes différentielles et champs de vecteurs

5.2.1 1-formes

On s'intéresse au cas des trois fibrés évoqués ci-dessus dans le cas des surfaces de Riemann X. Les sections du fibré trivial sont naturellement les fonctions sur X. On regarde maintenant le cas des sections des fibrés tangents et cotangents.

Définition 58. Une 1-forme différentielle est une section du fibré cotangent. Dans une carte, elle s'écrit

$$\alpha = \alpha_x \mathrm{d}x + \alpha_y \mathrm{d}y.$$

En effet, dans $\mathbb{R}^2$, une 1-forme se décompose dans la base $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. L'utilisation d'une carte permet de se ramener au cas de $\mathbb{R}^2$, où l'on dispose de la base canonique e_1^* et e_2^*. Les fonctions cnstantes égales à ces derniers sont notés $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$. La différence avec un fibré général est que la notation $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ permet d'encoder la règle de transformation lors d'un changement de coordonnée. La différentielle d'une fonction est naturellement une 1-forme, et $\mathrm{d}x$ est naturellement la différentielle de la fonction coordonnée x.

Exemple 59.
* N'importe quel exemple de 1-forme différentielle dans $\mathbb{R}^2$ est une 1-forme différentielle.
* Bien qu'il n'existe pas de fonction coordonnée réelle sur le cercle, on dispose d'une forme différentielle notée $\mathrm{d}\theta$.
* Pour voir l'effet du changement de carte, on peut par exemple utiliser le changement de coordonnées polaires $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Les 1-forme différentielles $\mathrm{d}x$ et $_d dy$ s'expriment dans les coordonnées (r, θ) par les formules

$$\mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}y = \sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta.$$

$\Diamond$

5.2.2 Champs de vecteurs

De manière duale, on a les sections du fibré tangent.

Définition 60. Un champ de vecteurs est une section du fibré tangent. Dans une carte, il s'écrit

$$v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il est possible d'évaluer une 1-forme sur un vecteur tangent. Les bases $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ sont en fait duales l'une de l'autre.

5.2.3 Différentielle d'une fonction

On note $\Omega^0(S)$ les fonctions lisses sur S, et $\Omega^1(S)$ les 1-formes. On a l'application différentielle

$$\mathrm{d} : \Omega^0(S) \to \Omega^1(S).$$

La différentielle d'une fonction est naturellement une 1-forme :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

qui à un vecteur tangent associe la dérivée directionnelle de f. Ces 1-formes sont appelées *exactes*.

5.2.4 intégration le long d'un champ de vecteurs

Il est possible d'intégrer une 1-forme sur un champ de vecteurs :

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t,$$

qui est indépendant de la paramétrisation grâce à la formule du changement de variable $t = \phi(s)$:

$$\int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t = \int_a^b \alpha_{\gamma\circ\phi(s)}((\gamma \circ \phi)'(s))\mathrm{d}s.$$

5.3 2-formes différentielles

5.3.1 Définition

Étant donné une 1-forme différentielle

$$\alpha = \alpha_1 \mathrm{d}x_1 + \alpha_2 \mathrm{d}x_2,$$

une condition nécessaire pour pouvoir lui trouver une primitive est que $R = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$ s'annule. En effet, si $\alpha = \mathrm{d}f$, par le lemme de Schwarz,

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Une telle forme est appelée *fermée*. Cette condition est suffisante pour localement trouver une primitive : il suffit d'intégrer l'une des deux fonctions pour trouver f, mais pas globalement.

Lemme 61. *(Poincaré) Si α est fermée, alors α est localement la différentielle d'une fonction.*

Démonstration. En prenant une carte locale, on peut se ramener au cas de $\mathbb{R}^2$. Soit α une 1-forme fermée. On pose alors

$$f(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \alpha_1(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1,$$

qui est une fonction. On a $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha_1$. D'autre part, par dérivation sous le signe intégral, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \int_0^{x_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1 = \int_0^{x_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1 = \alpha_2(x_1, x_2) - \alpha_2(0, x_2).$$

Donc la fonction

$$g(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \alpha_1(t_1, x_2)\mathrm{d}t_1 + \int_0^{x_2} \alpha_2(0, t_2)\mathrm{d}t_2,$$

convient. □

Exemple 62. On se place sur le tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ et on considère la 1-forme $\mathrm{d}x$. La fonction x n'est pas bien définie (elle l'est localement à une constante près), mais sa différentielle l'est, et on la note toujours $\mathrm{d}x$. Cette dernière est fermée, mais ne possède pas de primitive précisément car il n'existe pas de fonction x bien définie. Une autre manière de le voir et que l'acroissement entre deux points dépend du chemin choisi. ♢

On définit donc la différentielle de de Rham $\mathrm{d}\alpha$ qui est une 2-forme :

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\alpha_1 \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\alpha_2 \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Cela définit la différentielle de de Rham

$$\mathrm{d} : \Omega^1(S) \to \Omega^2(S).$$

Remarque 63. La différentielle de de Rham d'une 1-forme est une 2-forme : une fonction qui à chaque point associe une forme bilinéaire alternée sur l'espace tangent. Comme on est en dimension 2, cet espace est de dimension 1, généré par le déterminant $e_1^* \wedge e_2^*$. La fonction constante égale à $e_1^* \wedge e_2^*$ est notée $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Ici, $\wedge$ est le produit alterné : si f et g sont des formes linéaires, $f \wedge g(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$. Les 2-formes sont en fait des sections de $\Lambda^2 T^* X$, la second puissance extérieure du fibré cotangent. ♦

Proposition 64. *On a la formule de Leibniz*

$$\mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\mathrm{d}\alpha.$$

Remarque 65. En dimension quelconque, il est possible de définir les k-formes différentielles. Comme on se restreint au cas des surfaces, on s'arrête ici aux 2-formes différentielles. ♦

Remarque 66. Une autre manière d'obtenir les 2-formes est de tenter de dériver une seconde fois les fonctions. On obtient alors la Hessienne de la fonction. Cependant, on peut s'apercevoir que l'expression dépend des coordonnées choises, ce qui pousse à considérer les formes bilinéaires alternées et non générales, ce qui donne 0 en différentiant une seconde fois la différentielle d'une fonction. ♦

5.3.2 Intégration

Étant donné une 2-forme sur X surface de Riemann compacte, il est possible de l'intégrer. Soit σ une 2-forme. Pour définir l'intégrale, on peut se ramener au cas où le support de σ (l'ensemble $\overline{\{x : \sigma_x \neq 0\}}$) en utilisant des partitions de l'unité. On peut alors écrire $\sigma = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. On pose alors

$$\int_S \sigma = \int_U \sigma = \int_U f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

À nouveau, on peut vérifier que cela ne dépend pas des coordonnées choisies grâce à la formule de changement de variable qui fait apparaître le Jacobien du changement de variable.

Remarque 67. On utilise le fait que la surface de Riemann est orientée quand on montre que le résultat ne dépend pas des choix réalisés. ♦

5.3.3 Formule de Stokes

Pour une 1-forme exacte, on a la formule de Newton-Leibniz, également connue sous le nom de théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_a^b \mathrm{d}f = f(b) - f(a).$$

Cette formule possède également un analogue en dimension plus grande, connue sous le nom de formule de Stokes, qu'on se contentera d'énoncer. Si K est un compact à bord C^1 (par morceaux) et α est une 1-forme (donnant lieu à une 2-forme exacte), alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha.$$

Autrement dit, l'intégrale de α sur le contour s'exprime en fonction de ce qui se passe à l'intérieur. On a les conséquences suivantes

* Si α est fermée, son intégrale est nulle sur tout boucle homologiquement nulle, et l'intégrale sur un lacet ne dépend que de la classe d'homologie de ce dernier.
* L'intégrale d'une 2-forme exacte sur une surface de Riemann X est nulle. En effet, la surface est sans bord.
* Cette formule sera vérifiée en TD sur quelques exemples particuliers.

5.4 Cohomologie de de Rham

Les formes différentielles munies de la dérivée extérieure forment un complexe

$$0 \to \Omega^0(S) \to \Omega^1(S) \to \Omega^2(S) \to 0,$$

ce qui signifie seulement que la différentielle de de Rham de la différentielle d'une fonction est nulle. Les groupes d'homologie de ce complexe sont appelés groupes de Cohomologie de de Rham. Ils mesurent le défaut entre les formes fermées et les formes exactes.

Exemple 68. $*$ Le H^0 est toujours égal à $\mathbb{R}$ car une fonction de différentielle nulle est localement constante, donc constante si l'espace est connexe.

- $*$ Considérons $\mathbb{R}^2$: ses groupes de cohomologie en degré positif sont nuls : il est toujours possible d'intégrer une forme fermée grâce au lemme de Poincaré, ce qui en fait une forme exacte.
- $*$ On s'intéresse maintenant à la sphère. Soit α une 1-forme fermée sur S^2. On recouvre S^2 par deux ouverts U et V difféomorphes à $\mathbb{R}^2$. Il est possible d'intégrer α sur chacun des ouverts, donnant deux fonctions f_U et f_V. Sur l'intersection, $\mathrm{d}(f_U - f_V) = 0$, et $f_U - f_V$ est donc constante. Quitte à additionner une constante à f_U, on peut supposer que $f_U = f_V$, ce qui donne bien une primitive de α.
- $*$ On termine avec le tore : Soit α une 1-forme fermée sur le tore. On dispose de deux fonctions qui sont obtenues en intégrant les 1-formes sur les cercles $\theta = 0$ et $\phi = 0$ plongés dans le tore, ce qui donne deux nombres réels. Si α était exacte, on aurait

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}f = 0,$$

ce qui n'est pas forcément le cas pour toutes les 1-formes. Par exemple, les formes notées $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\phi$ (qui ne sont donc pas exactes !). Si ces intégrales sont nulles, il est possible d'intégrer pour trouver une primitive.
- $*$ Dans le cas des surfaces de Riemann, on dispose d'un morphisme $\Omega^2(S) \to \mathbb{R}$ obtenu en intégrant sur S. Ce morphisme descend à $H^2(S, \mathbb{R})$ puisque par la formule de Stokes, l'intégrale d'une 2-forme exacte sur S est nulle. Cette application est en fait un isomorphisme.

$\diamondsuit$

5.5 Interaction avec la structure complexe

On considère toujours le cas d'une surface de Riemann d'un point de vue différentiel réel, mais on utilise maintenant la structure complexe afin de définir les objets holomorphes. Dans une carte holomorphe, la multiplication par i donne un endomorphisme de l'espace tangent qui vérifie

$$J\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \text{ et } J\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

On a également un endomorphisme induit sur le fibré cotangent :

$$J^*\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y \text{ et } J^*\mathrm{d}y = \mathrm{d}x.$$

Comme $J^2 = -I$, il n'est pas possible de trouver des vecteurs propres à moins de passer aux coefficients complexes, ce que l'on fait donc. Les valeurs propres de J et J^* sont $\pm i$. Les espaces propres respectifs sont générés par

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y.$$

On a donc les décompositions

$$TX \otimes \mathbb{C} = \mathcal{T}^{1,0} \oplus \mathcal{T}^{0,1}.$$
$$T^*X \otimes \mathbb{C} = \mathcal{E}^{1,0} \oplus \mathcal{E}^{0,1}.$$

$\mathcal{T}^{1,0}$ est appelé fibré tangent holomorphe. La différentielle extérieure peut donc se décomposer $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}^{0,0} \arrow[dl, "\partial"'] \arrow[dr, "\overline{\partial}"] & \\
\mathcal{E}^{1,0} \arrow[dr, "\overline{\partial}"'] & & \mathcal{E}^{0,1} \arrow[dl, "\partial"] \\
 & \mathcal{E}^{1,1} &
\end{tikzcd}$$

De plus, on a

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}\overline{z}.$$

La différentielle d'une fonction à valeurs complexes se décompose comme $\partial f + \overline{\partial} f$. On peut alors réécrire les équations de Cauchy Riemann comme $\overline{\partial} f = 0$, condition suivant laquelle f est holomorphe.

Remarque 69. Comme $\mathrm{d}^2 = 0$, on a $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$. ♦

Définition 70. Une $(1,0)$-forme est holomorphe si $\overline{\partial}\beta = 0$.

En d'autres termes, une 1-forme holomorphe s'écrit donc dans une carte $f(z)\mathrm{d}z$ où f est une fonction holomorphe. Elles sont en particulier fermées, ce qui par la formule de Stokes donne la formule de Cauchy : si α est une 1-forme holomorphe,

$$\int_{\partial S} \alpha = 0.$$

Définition 71. Une 1-forme méromorphe α sur U est une 1-forme holomorphe sur $U - D$ où D est un ensemble discret, et qui peut localement être écrite de la forme $f(z)\mathrm{d}z$ où f est méromorphe. Si p est un pôle, on définit le résidu de α en p par

$$\mathrm{Res}_p \alpha = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \alpha,$$

où γ est un cercle centré sur p.

La formule de Cauchy assure que le résidu ne dépend pas du cercle choisi. Si l'on écrit $f(z) = \sum a_n z^n$, le résidu est en fait a_{-1}.

Proposition 72. *Soit α une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann compact. Alors la somme des résidus est nulle.*

Démonstration. On choisit des cercles centrés sur chacun des pôles. L'intégrale sur ces cercles est égale à la somme des résidus d'une part, et à 0 par la formule de Cauchy d'autre part. □

5.6 Fonctions harmoniques

On dispose d'un laplacien :

$$\Delta f = 2i\bar{\partial}\partial f.$$

Une fonction est harmonique si $\Delta f = 0$. La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmonique. Réciproquement, une fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.
On admet le théorème suivant, qui donne une solution à l'équation de Poisson.

Théorème 73. *Si $\rho \in \Omega^2$ est une 2-forme à coefficients complexes. Alors il existe $f \in \Omega^0$ telle que $\Delta f = \rho$ si et seulement si $\int_X \rho = 0$. Une telle solution est unique à constante près.*

Démonstration. La condition est nécessaire par le théorème de Stokes. La solution est unique car deux solutions qui diffèrent d'une fonction harmonique, qui est constante par le principe du maximum. $\square$

On renvoie au livre de Donaldson pour une preuve avec des ingrédients d'analyse fonctionnelle.

Chapitre 6

Formule de Riemann-Hurwitz

On revient maintenant à des considérations plus “complexes” en considérant les applications holomorphes entre surfaces de Riemann. Rappelons qu'à chaque surface de Riemann est associé un *genre*, défini topologiquement via la caractéristique d'Euler.

6.1 Revêtements ramifiés entre surfaces de Riemann

Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann. On a vu que au voisinage de chaque point x dans des cartes convenables, f peut toujours s'écrire

$$f(z) = z^{k_x}.$$

L'exposant k_x s'appelle le nombre de ramification en x.

On va définir le degré du revêtement, qui peut être calculé en comptant le nombre de préimages avec multiplicité.

Théorème 74. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes. Alors pour tout y, $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini, et le nombre $\sum_{f(x)=y} k_x$ est indépendant de y, appelé degré de f.*

Démonstration. L'ensemble $f^{-1}(y)$ est discret car f et holomorphe, et il est compact, donc fini. Soit $y \in Y$, on vérifie que la quantité annoncée est localement constante. Soient $x_1, \dots, x_r$ les préimages de y. On peut trouver des voisinages U_i de x_i qui arrivent dans un voisinage fixé V de Y. De plus, comme une application holomorphe est ouverte, l'intersection des $f(U_i)$ est un voisinage ouvert de y.
On affirme qu'il existe un voisinage de y dans lequel tous les points ont leur préimage dans $\bigsqcup U_i$. En effet, supposons par l'absurde que ça ne soit pas le cas. Alors il existe $y_n \to y$ et $y_n = f(z_n)$, $z_n \notin \bigsqcup U_i$. Comme f est propre (ou alternativement X compact), on peut supposer que z_n converge vers z. Par continuité, $f(z) = y$ et donc z est l'un des x_i, absurde.
On s'est donc ramené à trouver le nombre d'antécédents de $z \mapsto z^{k_{x_i}}$, qui est bien localement constant égal à $\sum k_{x_i}$. □

Remarque 75. En enlevant les points et valeurs critiques, on obtient un revêtement fini, ce qui garantit déjà que le nombre de préimages est constant en dehors des valeurs critiques. Il suffirait alors de regarder au voisinage des points critiques. ♦

Proposition 76. *On a* $\deg g \circ f = \deg g \deg f$.

Exemple 77.
* Le degré d'une fraction rationnelle de degré d vue comme application $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ est d.
* Le degré de la fonction de Weierstrass sur une courbe elliptique est 2.

♢

Proposition 78. *Une application holomorphe de degré* 1 *est un biholomorphisme.*

6.2 Formule de Riemann-Hurwitz

On se donne une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann compactes X et Y. La formule de Riemann-Hurwitz donne une relation entre les caractéristiques d'Euler de X et Y et généralise celle d'un revêtement au cas d'un revêtement ramifié.

Théorème 79. *Soit* $f : X \to Y$ *ne application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes et de degré* d. *On a la formule*

$$\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_x (k_x - 1),$$

où la somme a lieu sur les points de X *et* k_x *est l'indice de ramification en* x.

Remarque 80. En particulier, dans le cas où il n'y a pas de ramification, on a $\chi(Y) = d\chi(X)$. ♦

Démonstration. On choisit une triangulation de Y qui fait intervenir les valeurs critiques. On compte alors les triangles. Chaque arête et chaque triangle possède d préimages qui induisent une triangulation de X. Cependant, les valeurs critiques n'ont pas d préimages mais seulement $\sum_{f(x)=y} 1$. On utilise alors que $\sum_{f(x)=y} k_x = d$ pour achever de faire apparaître la caractéristique d'Euler. □

Remarque 81. Il est aussi possible de montrer la formule en regardant le degré d'une 1-forme méromorphe, ce qui sera possible plus tard quand on aura vu le degré d'un fibré. ♦

Exemple 82.
* Un polynôme donne une fonction holomorphe de $\mathbb{C}P^1$ dans lui-même. Il est ramifié à l'ordre d en l'infini. Les points critiques sont les racines de P'. La somme des ordres est égale au degré de P', donc $d-1$. La formule donne

  $$2 = 2d - (d-1) - (d-1).$$

* Pour la fonction $\wp$ de Weierstrass, qui est de degré 2 puisqu'elle possède un unique pôle double, on obtient qu'il y a 4 points de ramification (ceux-cis étant au plus simples).

♢

6.3 Applications

6.3.1 Formule genre-degré

Une des utilisations de la formule de Riemann-Hurwitz est de calculer le genre des surfaces de Riemann grâce à des applications holomorphes ou méromorphes. Revenons par exemple au cas des courbes projectives de degré d.

Proposition 83. *Une courbe de degré d dans $\mathbb{C}P^2$ a genre*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Démonstration. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que la courbe ne passe pas par $[1:0:0]$. On peut alors projeter :

$$\pi([x:y:z]) = [y:z] \in \mathbb{C}P^1,$$

qui est bien définie sur la courbe et fournit une application holomorphe vers $\mathbb{C}P^1$. Cette dernière est de degré d puisque le polynôme est de degré d. Il s'agit maintenant de trouver les points de ramification. On peut également supposer que la courbe est transverse à la droite à l'infini, ce qui implique que tous les points critiques sont dans $\mathbb{C}^2$, ce qui permet de travailler dans le cadre affine : la courbe est donnée par $P(x,y) = 0$, et l'application est $(x,y) \mapsto y$.
Si $\partial_x P(p) \neq 0$, y peut être utilisée comme coordonnée locale en p, et on a pas de ramification. Supposons donc que $\partial_x P(p) = 0$, ce qui force $\partial_y P(p) \neq 0$. On peut donc utiliser x comme coordonnée locale. En différentiant $P(x, y(x)) = 0$, il vient

$$\partial_x P + y'(x)\partial_y P,$$

de sorte que l'ordre d'annulation de $y'(x)$ (égal par définition à $k_p - 1$) est égal à l'ordre d'annulation de $\partial_x P$ le long de la courbe, soit précisément le nombre d'intersection. Le théorème de Bezout donne alors $d(d-1)$ slutions. Il vient

$$2 - 2g = 2d - d(d-1).$$

□

Exemple 84.

- Droites et coniques sont de genre 0.
- Les cubiques sont de genre 1. Ceci ne s'applique pas au cubiques singulières. Par exemple, la cubique d'équation $y^2 = x^3 - x^2$ peut-être paramétré par $\mathbb{C}P^1$, ce qui en fait une courbe rationnelle.
- Les quartiques sont de genre 3.

◊

6.3.2 Automorphismes des surfaces de Riemann

On a déjà calculé les groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann de genre 0 et 1. Le groupe d'automorphismes d'une surface de genre $\geqslant 2$ est en fait fini (ce que l'on admet). Il est alors possible d'utiliser la formule de Riemann-Hurwitz pour borner sa taille.

Théorème 85. *Le groupe des automorphismes d'une surface de Riemann est de cardinal inférieur à* $84(g-1)$.

Démonstration. Soit N le cardinal du groupe d'automorphismes. Le quotient $X/\mathrm{Aut}(X)$ est naturellement muni d'une structure de surface de Riemann. Soit n_p le cardinal du stabilisateur d'un point p, g le genre de la surface et γ le genre de la surface quotient. Riemann-Hurwitz donne

$$2g-2 = N(2\gamma-2) + \sum k_x - 1.$$

De plus, pour tout point q dans $X/\mathrm{Aut}(X)$, $k_p = n_p = n_q$ (car indépendant du p choisi dans $\pi^{-1}(q)$) et $|\pi^{-1}(q)| = \frac{N}{n_p}$. Donc

$$2g-2 = N(2\gamma-2) + \sum_q N\left(1-\frac{1}{n_q}\right).$$

On distingue alors différents cas :

- Si $\gamma \geqslant 2$, on a $2g-2 \geqslant 2N$.
- Si $\gamma = 1$, alors $2g-2 = N\sum 1-\frac{1}{n_q}$. Comme l'expression est non nulle, le terme de droite est $\geqslant \frac{1}{2}$ et donc $N \geqslant 4g-4$.
- Enfin, si $\gamma = 0$,
$$2g-2 = N\left(\sum(1-\frac{1}{n_q})-2\right).$$
D'où $\sum 1-\frac{1}{n_q} > 2$, ce qui force la projection à être ramifiée en au moins trois points.
  - Si elle se ramifie en au moins 5 points, on a $2g-2 \geqslant \frac{N}{2}$.
  - Si elle se ramifie en 3 ou 4 points, il s'agit de majorer $\sum \frac{1}{n_q}$ sujets aux conditions
  $$0 < \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3} < 1,$$
  $$1 < \frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4} < 2,$$
  ce qui mène à l'unique solution $(2,3,7)$ pour laquelle on a $2g-2 \geqslant \frac{N}{42}$.

□

6.3.3 Nombres de Hurwitz

On termine cette section par une courte introduction à la théorie d'Hurwitz. On se donne une surface de Riemann X de genre g_0 avec n points marqués dessus, un entier d et n partitions de d. Le problème de Hurwitz consiste à compter/énumérer les revêtements ramifiés de X de degré d, genre fixé, ayant des profils de ramification fixés en les points marqués. Ce problème a du sens lorsque les contraintes satisfont la condition de Riemann-Hurwitz :

$$2g - 2 = d(2g_0 - 2) + \sum \|\mu_i\| - l(\mu_i).$$

Chaque revêtement est compté avec une poids inverse à son nombre d'automorphismes. Le résultat s'avère être un invariant, il peut d'ailleurs être défini topologiquement.

Remarque 86. Les nombres d'Hurwitz sont reliés aux morphismes du groupe fondamental de la surface épointée vers le groupe symétrique et ayant des monodromies fixées autour des ponctions. C'est une théorie riche avec de nombreuses interprétations. ⧫

Troisième partie

Fonctions méromorphes et théorème de Riemann-Roch

Chapitre 7

Surfaces Riemaniennes : le point de vue métrique

7.1 Champ de vecteurs et étoile de Hodge

Soit X une surface de Riemann. Commençons par remarquer qu'il est possible de munir une surface de Riemann d'une métrique conforme, *i.e.* pour laquelle la structure complexe est la rotation d'angle $\pi/2$.

Proposition 87. *Il est possible de munir X d'une métrique compatible avec la structure complexe, i.e. qui définit la même mesure d'angle.*

Démonstration. Dans une coordonnée holomorphe, la métrique doit s'écrire $e^{u(x,y)}\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$. On utilise les partitions de l'unité pour construire une telle métrique. □

Réciproquement, on a le théorème suivant, beaucoup plus compliqué à démontrer que le théorème de Gauss.

Théorème 88. *(Gauss-Korn-Lichtenschtein) Si (S, g) est une surface orientée munie d'une métrique, il existe une unique structure de surface de Riemann compatible.*

On a vu que la structure de surface de Riemann permet de définir l'opérateur presque complexe associé

$$J : TS \to TS,$$

qui en termes géométriques est la rotation d'angle $\pi/2$. Il vérifie $J^2 = -I$. On définit l'étoile de Hodge en tournant vecteurs et formes :

$$*v = Jv \text{ si } v \in TS,$$

$$*\alpha = -\alpha \circ J \text{ si } \alpha \in T^*S.$$

En combinant la métrique et la structure complexe, il est possible de définir une forme volume vol sur X :

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2) = \langle Jv_1, v_2 \rangle.$$

Cette forme est effectivement antisymétrique, bilinéaire et non dégénérée. De plus, comme on dispose d'une métrique, chaque 1-forme possède un gradient, ce qui permet de relier 1-formes et champs de vecteurs :

$$\alpha = \langle v_\alpha, - \rangle.$$

Les signes sont choisis de sorte que l'on ait le lemme suivant.

Lemme 89. *On a $v_{*\alpha} = *v_\alpha$. De plus,*

$$\mathrm{vol}(*v_1, v_2) = -\langle v_1, v_2 \rangle,$$

$$\langle v_{\alpha_1}, v_{\alpha_2} \rangle \mathrm{vol} = \alpha_1 \wedge *\alpha_2.$$

Démonstration. Provient du fait que J est un endomorphisme orthogonal d'inverse $-J$. □

7.2 Rotationnel et divergence

Soit v un champ de vecteur, qui fournit une 1-forme α_v via la métrique.

Définition 90. Le rotationnel de v est défini par

$$\mathrm{d}\alpha_v = \mathrm{rot} v \cdot \mathrm{vol}.$$

La divergence de v est défini par

$$\mathrm{d}(*\alpha_v) = \mathrm{div} v \cdot \mathrm{vol}.$$

Remarque 91. Le théorème de Stokes garantit que pour un ouvert au bord C^1 :

$$\int_{\partial U} \langle v, t \rangle \mathrm{d}l = \int_U \mathrm{rot} v \cdot \mathrm{vol}.$$

Autrement dit, la circulation du champ de vecteur est égale à l'intégrale du rotationnel à l'intérieur. Le champ est irrotationnel si le rotationnel est nul, *i.e.* α_v est fermée. De même,

$$\int_{\partial U} \langle v, n \rangle \mathrm{d}l = \int_U \mathrm{div} v \cdot \mathrm{vol}.$$

Autrement dit, le flux sortant est égal à l'intégral de la divergence. Le flux est dit incompressible si la divergence est nulle, *i.e.* $*\alpha$ est fermée. ♦

Remarque 92. On a

$$\mathrm{rot}(*v) = \mathrm{div} v \text{ et } \mathrm{div}(*v) = -\mathrm{rot} v.$$

Donc si v est irrotationnel (resp. incompressible), $*v$ est incompressible (resp. irrotationnel). ♦

7.3 Formes holomorphes et champs de vecteurs

Soit v un champ de vecteurs irrotationnel. On rappelle le lemme de Poincaré.

Lemme 93 (Poincaré)**.** *Toute forme fermée est localement exacte.*

Si v est un champ de vecteurs irrotationnel, on peut donc écrire v comme le gradient d'une fonction u. Si v est de plus incompressible, u est en fait harmonique : le laplacien peut s'écrire div grad u, ou bien

$$\mathrm{d} * \mathrm{d}u = \mathrm{d} * \alpha = 0.$$

On sait alors par le cours d'analyse complexe que u est la partie réelle d'une fonction holomorphe : elle est analytique. Soit u le potentiel du champ de vecteur v et u^* le potentiel du champ de vecteurs $*v$. Ils ne sont définis qu'à une constante près, de sorte que la 1-forme complexe

$$\eta = \mathrm{d}u + i\mathrm{d}u^*$$

est bien définie sur la surface S.

Lemme 94. *La* 1*-forme* η *est holomorphe.*

Démonstration. On se place sur un ouvert où v ne s'annule pas. On a l'application $u+iu^* : U \to \mathbb{C}$. Les gradients de u et u^* sont orthogonaux et de même norme, de sorte que l'application est holomorphe. Donc η est holomorphe en dehors des zéros de v (qui sont isolés). On en déduit que η est holomorphe sur S (car une fonction holomorphe en dehors d'un point est bien holomorphe en le point). $\square$

Réciproquement, étant donné une 1-forme holomorphe, le champ dual à sa partie réelle est irrotationnel et incompressible. Si η est une 1-forme, et au voisinage d'un point d'annulation on peut écrire dans une carte

$$\eta = nz^{n-1}\mathrm{d}z.$$

(image ?)

7.4 Et les formes méromorphes ?

On s'intéresse maintenant aux 1-formes méromorphes.

Lemme 95. *Soit* η *une* 1*-forme méromorphe. Au voisinage d'un pôle, il existe une coordonnée locale où elle prend la forme*

$$\eta = \left(\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w^m}\right)\mathrm{d}w.$$

Démonstration. Dans une coordonnée locale quelconque, on a

$$\eta = \frac{\lambda}{z}\mathrm{d}z + \mathrm{d}\left(\frac{h(z)}{z^{m-1}}\right).$$

On fait un changement de la forme $w(z) = zu(z)$ où $u(0) = 1$. On trouve l'équation satisfaite par u que l'on résoud à l'aide des fonctions implicites. $\square$

Exemple 96. Considérons la 1-forme $\mu\frac{\mathrm{d}w}{w}$. La partie réelle se décompose en fonction de la partie réelle et imaginaire de μ. Dans le cas réel, le potentiel est $\mu \log r$, ce qui mène à des sources/puits, les lignes de champs sont dans la direction des rayons. Dans le cas imaginaire pur, elles y sont orthogonales, le potentiel est $-\mu\theta$, ce qui donne des tourbillons. ◊

Exemple 97. On peut obtenir les singularités d'ordre supérieur en superposant puis passant à la limite. Par exemple, pour $m = 2$, ça fait les lignes de champ d'un dipôle. ◊

En conclusion, trouver une 1-forme méromorphe η à pôles prescrits revient à trouver un champ v irrotationnel et incompressible telle que chaque pôle de η corresponde à une singularité de v. C'est un problème de plomberie.

7.5 Périodes

Soit η une 1-forme holomorphe et $a \in H_1(S, \mathbb{Z})$ une classe d'homologie, que l'on peut représenter par un cycle γ.

Définition 98. La période de η sur a est $\int_\gamma \eta$, où γ représente a. On définit aussi $[\mathrm{Re}\eta](a)$ en prenant la partie réelle.

Remarquons que que comme $\langle v, t\rangle = -\langle *v, n\rangle$,

$$[\mathrm{Re}\eta](a) = \int_\gamma \langle -(*v), n\rangle \mathrm{d}l.$$

Chapitre 8

Théorie de Hodge, construction de 1-formes

Dans ce chapitre on va construire des formes méromorphes sur une surface de Riemann.

8.1 Théorème d'existence

Soit X une surface de Riemann, $P_1, \ldots, P_m$ des points et des parties principales

$$\left(\sum_{1}^{m_i} c_{k,i} z_i^{-k}\right) \mathrm{d}z_i,$$

fixées en chaque point. On fixe également $2g$ courbes simples fermées qui forment une base de $H_1(X, \mathbb{Z})$, par exemple les a_i, b_i donnés en prenant une forme normale de la surface. Le principal théorème est le suivant.

Théorème 99. *On suppose que la somme des résidus $\sum_i c_{-1,i}$ est nulle. Alors, pour chaque système de $2g$ nombres réels, il existe une unique forme méromorphe qui possède des pôles uniquement en les P_i avec les parties principales données, et dont les périodes évaluées sur les $2g$ courbes fermées ont comme partie réelle les $2g$ nombres donnés.*

Remarque 100. On peut en particulier l'appliquer dans le cas où il n'y a pas de pôles : on peut trouver une unique 1-forme holomorphe en fixant les parties réelles des périodes sur les courbes fermées. ⧫

Remarque 101. On fixe seulement la partie polaire, pas les termes suivants, autrement le développement en un point détermine la forme partout. ⧫

De part la relation avec les champs de vecteurs irrotationnels et incompressibles, afin de montrer le théorème, il s'agit de trouver un tel champ de vecteur pour construire une 1-forme holomorphe. On va pour cela trouver la forme duale à ce champ de vecteur.

8.2 Théorie de Hodge

Afin de montrer le théorème, on introduit quelques concepts de théorie de Hodge. Cette dernière a été introduite afin de généraliser aux variétés complexes les phénomènes que l'on observe ici en dimension 1.

8.2.1 formes harmoniques

Définition 102. Une 1-forme lisse ω est dite cofermée si $*\omega$ est fermée. Elle est dite harmonique si elle est fermée et cofermée.

Remarque 103. Une 1-forme harmonique est duale à un champ de vecteur irrotationnel (fermée) et incompressible (cofermée). ♦

- La partie réelle d'une 1-forme holomorphe est harmonique. En effet,

  $$(r + is)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = r\mathrm{d}x - s\mathrm{d}y + i \cdots ,$$

  et le caractère fermé ainsi que cofermé découlent des équations de Cauchy-Riemann.
- Dans une carte holomorphe, le caractère fermé donne que ω, et le lemme de Poincaré donne

  $$\omega = \partial_x f \mathrm{d}x + \partial_y f \mathrm{d}y.$$

  Ensuite, $*\omega$ fermée donne que $\Delta f = 0$, donc ω est localement la différentielle d'une fonction harmonique.
- Une 1-forme holomorphe est localement la partie réelle d'une 1-forme méromorphe. En effet, si

  $$\omega = r\mathrm{d}x - s\mathrm{d}y,$$

  alors ω est la partie réelle de $(r + is)\mathrm{d}z$, et $r + is$ est holomorphe car elle vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Une explication sur le mot *cofermé*. On a un produit scalaire sur l'espace des 1-formes donné par l'étoile de Hodge :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \wedge *\beta.$$

On peut prolonger l'étoile de Hodge pour qu'elle échange Ω^0 et Ω^2. Chacun est muni d'un produit scalaire. On a donc les duaux de l'opérateur de dérivation. En réalité, on a

$$\mathrm{d}^* = \pm * \mathrm{d}^* * .$$

8.2.2 Théorème de décomposition de Hodge

On a le théorème suivant, qui est un cas particulier de la théorie de Hodge valable en toute dimension et développée pour généraliser le résultat de la situation bidimensionnelle.

Théorème 104. *Toute* 1*-forme lisse se décompose de manière unique*

$$\omega = \omega_h + \mathrm{d}F + *\mathrm{d}G,$$

où ω_h *est harmonique,* F,G *sont des fonctions réelles définies globalement sur* X*.*

Remarque 105. On a décomposé comme la somme de trois 1-formes : une forme harmonique, une exacte et une co-exacte. ♦

On admet provisoirement ce théorème pour montrer le théorème d'existence des formes holomorphes et méromorphes énoncé dans la section précédente.

Preuve dans le cas holomorphe.

- Une 1-forme holomorphe est entièrement déterminée par sa partie réelle, donc on cherche une 1-forme harmonique. Il s'agit donc de montrer qu'il existe une unique 1-forme harmonique avec les périodes prescrites.
- Par la théorie de de Rham, il existe une 1-forme fermée ayant les périodes prescrites. Une forme est exacte si et seulement si les périodes sont nulles. On prend α une telle forme.
- On applique à α la décomposition du théorème. Comme α est fermée, $*\mathrm{d}G$ aussi. Or,

  $$\int_S |*\mathrm{d}G|^2\mathrm{vol} = -\int_S G \cdot \mathrm{d}(*\mathrm{d}G),$$

  obtenu en différentiant $G \cdot *\mathrm{d}G$ et utilisant le fait que $\mathrm{d}G \wedge *\mathrm{d}G = |*\mathrm{d}G|^2\mathrm{vol}$. Donc $*\mathrm{d}G = 0$. Ainsi, ω est cohomologue à une forme harmonique qui a par conséquent les même périodes.
- Pour l'unicité, il s'agit de montrer qu'une 1-forme harmonique dont les périodes sont nulles est nulle. Une telle forme est exacte et sa primitive est harmonique. Par le principe du maximum, sa primitive est constante et ω est nulle.

□

Preuve dans le cas méromorphe. On se donne les parties principales en les points donnés. Il s'agit de trouver une 1-forme qui a les parties principales données, puisque la différence de deux telles 1-formes est holomorphes. On est alors ramené au cas holomorphe.

- On commence par prolonger (n'importe comment) : soit α une 1-forme réelle lisse sur $S - \{P_1, \ldots, P_m\}$ qui vérifie $\alpha = \mathrm{Re}(pcp)$ au voisinage de chaque point. Elle est harmonique au voisinage des points P_i.
- La 2-forme $\mathrm{d}\alpha$ se prolonge par 0 au voisinage des pôles, et est donc globalement définie : on la note σ. Grâce au théorème des résidus, on vérifie que $\int_X \sigma = 0$. (On décompose X comme des disques centrés sur les pôles) On choisit donc une primitive β qui vérifie $\mathrm{d}\beta = \sigma$.
- La 1-forme $\alpha - \beta$ est définie en dehors des pôles, et est fermée par construction.
- Comme on a également $\mathrm{d}(*\alpha) = 0$ au voisinage des pôles, on peut également prolonger $\mathrm{d}(*\alpha)$ par 0 pour obtenir une 2-forme σ' définie partout. Son intégrale est également 0 par

le théorème des résidus. L'intégrale de $\mathrm{d}(*\beta)$ est nulle par Stokes. Ainsi, on peut trouver une primitive γ à $\sigma' - \mathrm{d}(*\beta)$. Par construction, on a

$$\mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}(*\alpha - *\beta),$$

en dehors des pôles.

- On applique le théorème de décomposition à γ :

$$\gamma = \omega_h + \mathrm{d}F + *\mathrm{d}G.$$

En appliquant d :

$$\mathrm{d}(*\mathrm{d}G) = \mathrm{d}\gamma = \mathrm{d}(*\alpha - *\beta).$$

Ainsi, $\alpha - \beta - \mathrm{d}G$ est cofermée, mais également fermée puisque $\alpha - \beta$ l'était. Elle est harmonique. Sa partie polaire est bien celle-de α puisque β et G sont définies partout.

□

8.3 Démonstration du théorème de Hodge

Étape 1 : Une décomposition orthogonale dans un Hilbert. On utilisera l'espace de Hilbert suivant.

Définition 106. On a l'espace $\Omega^1_{L^2}(S)$ des 1-formes réelles dont les coefficients sont des fonctions mesurables de carré intégrable. C'est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_S \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

Les éléments sont obtenus en recollant localement des éléments de la forme $\alpha_x \mathrm{d}x + \alpha_y \mathrm{d}y$ avec α_x et α_y des fonctions à carré intégrable.
Soit E l'adhérence de l'espace des formes lisses exactes, et E^* celui des formes co-exactes.

Lemme 107. *E et E^* sont orthogonaux*

Démonstration.

$$\int_S \mathrm{d}F \wedge *\omega = -\int_S F\mathrm{d}(*\omega).$$

□

On note H l'orthogonal de $E \oplus E^*$, de sorte qu'on a la décomposition orthogonale recherchée :

$$\Omega^1_{L^2}(S) = E \oplus E^* \oplus H.$$

Il faut d'abord montrer que H est l'espace des formes harmoniques.

Étape 2 : L'espace H est bien celui des formes harmoniques.

Lemme 108 (lemme de Weyl)**.** *Sur le disque euclidien, toute* 1*-forme mesurable de carré intégrable et orthogonale aux formes exactes et coexactes à support compact est harmonique.*

Démonstration. On procède en deux temps.

- Supposons que ω est lisse, il faut montrer qu'elle est fermée et cofermée. Comme $*\omega$ vérifie les même propriétés, il suffit par exemple de montrer que $*\omega$ est fermée.

  Par la formule de Leibniz, comme $*\omega$ est orthogonale aux 1-formes exactes à support compact, on en déduit que $\mathrm{d}(*\omega)$ est une 2-forme orthogonale à toutes les fonctions à support compact, elle est nulle.
- Il faut maintenant montrer que ω est lisse. L'idée est de régulariser ω par convolution avec une fonction invariante par rotation, la formule de la moyenne garantissant alors que ω était en fait déjà lisse.

Soit K_ρ un noyau de convolution à support dans D_ρ.

$$M_\rho f(x) = \int_D K_\rho(x-t)f(t)\mathrm{d}t = \int_{D_\rho} K_\rho(t)f(x-t)\mathrm{d}t,$$

qui est une fonction définie correctement sur $D_{1-\rho}$. On définit la convolution coordonnées par coordonnées pour les 1-forme en utilisant la base $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$. On vérifie les propriétés suivantes.

(i) Pour toute fonction intégrable, $M_\rho f$ est définie et lisse sur $D_{1-\rho}$.

(ii) L'opérateur de convolution M_ρ défini sur les 1-formes commute à l'étoile de Hodge $*$ (qui est juste une rotation dans chaque fibre), et également à d (car la convolution commute à la dérivation).

(iii) L'opérateur M_ρ est auto-adjoint sur $L^2(S)$: si f est une fonction et g à support dans $D_{1-\rho}$, on a par Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leqslant 1-\rho} (M_\rho f)(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{|x|\leqslant 1-\rho}\int_{|t|\leqslant 1} K_\rho(x-t)f(t)g(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{|t|\leqslant 1} f(t)\int_{|x|\leqslant 1-\rho} K_\rho(t-x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\leqslant 1} f(t)\int_{|x|\leqslant 1} K_\rho(t-x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\leqslant 1} f(t)(M_\rho g)(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(iv) Les opérateurs de convolution M_ρ commutent car la convolution est associative, et $K_\rho * K_{\rho'} = K_{\rho'} * K_\rho$. Cela a lieu sur $D_{1-\rho-\rho'}$.

(v) Pour tout $0 < r < 1$, on a que $M_\rho f$ converge vers f dans $L^2(D_r)$ lorsque ρ tend vers 0. (C'est vrai pour les fonctions à support compact, puis par densité)

(vi) Si u est harmonique sur D, alors $M_\rho u = u$ sur $D_{1-\rho}$ grâce à la formule de la moyenne.

On suppose maintenant que ω est dans H. En utilisant (ii) et (iii), $M_\rho\omega$, qui est lisse, est orthogonale aux formes exactes et co-exactes, donc harmonique par le cas lisse. Il reste à montrer que M_ρ est égale à ω presque partout. Soit u le potentiel de $M_\rho\omega$: $M_\rho\omega = \mathrm{d}u$. On a que :

$$M_{\rho'}(M_\rho\omega) = M_{\rho'}(\mathrm{d}u) = \mathrm{d}(M_{\rho'}u) = \mathrm{d}u = M_\rho\omega,$$

en utilisant l'harmonicité de u. Par commutation, on déduit que $M_\rho\omega = M_{\rho'}\omega$, qui est donc constante. Or, elle tend vers ω, d'où le résultat. □

Le lemme de Weyl montre qu'un élément de H, qui est orthogonale à toutes les 1-formes exactes et co-exactes, est localement harmonique, donc harmonique.

Étape 3 : Les éléments dans E et E^* sont bien lisses.

Lemme 109. *Soit ω une 1-forme lisse sur D, alors il existe des fonctions lisses telles que*

$$\omega = \mathrm{d}F + *\mathrm{d}G.$$

Remarque 110. Attention, ce n'est que pour le disque ! Sinon on pourrait toujours prendre la forme harmonique nulle dans le théorème de Hodge. ♦

Démonstration. Si ω est fermée, elle est exacte, on cherche donc G telle que $\omega - *\mathrm{d}G$ est fermée. En posant $\mathrm{d}\omega = \varphi \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, cela revient à résoudre $\varphi = \Delta G$. La solution est donnée par

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_D \log\|x-t\|\varphi(t)dt.$$

□

On peut maintenant achever la preuve. Soit ω une 1-forme lisse. La décomposition permet d'écrire

$$\omega = \omega_h + a + b,$$

où ω_h est harmonique, et a et b sont limites L^2 de 1-formes exactes et co-exactes. On peut d'autre part écrire localement $\omega = \mathrm{d}F + *\mathrm{d}G$, ce qui donne localement

$$\begin{aligned} \omega_h + a + b &= \mathrm{d}F + *\mathrm{d}G \\ \omega_h + a - \mathrm{d}F &= *\,\mathrm{d}G - b. \end{aligned}$$

Le terme de gauche est orthogonal aux formes coexactes à suport compact, et celui de droite aux formes exactes à support compact. Il est donc harmonique, et par conséquent lisse. Ceci force la régularité de a et b : a et b sont des 1-formes lisses, limites L^2 de 1-formes exactes (resp. coexactes). Pour conclure, il faut montrer que a (resp. b) est exacte (resp. co-exacte).

Lemme 111. *Si α_n et α sont des formes lisses avec α_n exacte et $\alpha_n \xrightarrow{L^2} \alpha$, alors α est également exacte.*

Démonstration. La suite de 1-forme $\alpha - \alpha_n$ a ses périodes constantes puisque α_n est exacte. De plus, on considère un chemin plongé γ, épaissi en considérant un voisinage tubulaire $N_\varepsilon(\gamma)$. Les 1-formes peuvent se décomposer de la forme

$$\alpha_t \mathrm{d}t + \alpha_\varepsilon \mathrm{d}\varepsilon.$$

Pour une fonction φ à support dans $]-\varepsilon;\varepsilon[$ et une 1-forme β, on a

$$\begin{aligned}\int_{N_\varepsilon(\gamma)} \beta \wedge (\varphi \mathrm{d}\varepsilon) &= \int_{t=0}^{1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(\varepsilon)\beta_t(t,\varepsilon)\mathrm{d}t\mathrm{d}\varepsilon \\ &\leqslant \left(\int \beta_t^2\right)^{1/2} \cdot C.\end{aligned}$$

Donc avec $\beta = \alpha - \alpha_n$, on en déduit que l'intégrale contre toute 1-forme localisée au voisinage d'un 1-cycle est nulle. (On utilise que $\alpha - \alpha_n$ tend faiblement vers 0 dans le Hilbert)
En prenant φ dont le support tend vers 0, le produit scalaire vaut 0, mais tend par ailleurs vers l'intégrale de α le long de γ, qui est donc également nulle. Ainsi, α est exacte. □

Chapitre 9

Diviseurs sur une surface de Riemann, théorème de Riemann-Roch

9.1 Fonctions méromorphes

On a montré dans le chapitre précédent qu'une surface possédait beaucoup de 1-formes méromorphes : il est possible de spécifier les parties principales en les pôles ainsi que les parties réelles des périodes sur une base de $H_1(X, \mathbb{Z})$. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 112. *Sur toute surface de Riemann il existe une fonction méromorphe non constante.*

Démonstration. Il suffit de faire le quotient de deux 1-formes, ce qui donne naturellement une fonction méromorphe. □

Étant donnés des points $P_1, \ldots, P_m$, on peyt donc définir l'espace vectoriel $\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_m)$ des fonctions méromorphes ayant des pôles au plus simples en les P_i. Le but du théorème de Riemann-Roch est d'évaluer sa dimension.

9.2 Diviseurs sur une surface de Riemann

Définition 113. Soit X une surface de Riemann. Un diviseur est une somme formelle de points. Le degré du diviseur est la somme des coefficients. Il est dit *effectif* si les coefficients sont tous positifs.

Définition 114. Si $f : X \to \mathbb{C}P^1$ est une fonction méromorphe, son diviseur est la somme de ses pôles et zéros, comptés avec multiplicité. Ces diviseurs sont appelés *principaux*, et sont de degré 0.

Définition 115. Deux diviseurs qui diffèrent d'un diviseur principal sont appelés linéairement équivalents.

Soit D un diviseur, on s'intéresse à l'espaces des fonctions méromorphes telles que $(f) + D$ soit effectif. En écrivant $D = \sum n_i(p_i) - \sum m_j(q_j)$, cela signifie les fonctions méromorphes ayant un pôle d'ordre au plus n_i en chacun des p_i, et un zéro d'ordre au moins m_j en chacun des q_j. Elles forment un espace vectoriel $H^0(D)$.

Proposition 116. *Si D et D' sont linéairement équivalents, les espaces $H^0(D)$ et $H^0(D')$ sont isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de multiplier par g où $D - D' = (g)$. □

Le théorème de Riemann-Roch s'attache à exprimer la dimension de ces espaces, en d'autres termes la dimension de l'espace de certaines fonctions méromorphes sur X. On s'intéressera d'abord aux $\mathcal{E}(P_1, \ldots, P_m)$.

9.3 Riemann-Roch pour les diviseurs somme de points distincts

Soient $P_1, \ldots, P_m$ des points distincts. On note $\mathcal{E}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions méromorphes ayant au plus des pôles simples en les P_i, *i.e.* associé au diviseur $P_1 + \cdots + P_m$.

Théorème 117. *(inégalité de Riemann) On a l'inégalité*

$$\dim \mathcal{E}(D) \geqslant m - g + 1.$$

Démonstration. On fixe des courbes a_i, b_i et une coordonnée locale en chaque point P_k. Soit ω_k l'unique 1-forme méromorphe ayant pour partie principale $\frac{dz}{z^2}$ en P_k et holomorphe ailleurs, et ayant toutes ses périodes réelles nulles. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ qui est formé par les $\lambda \in \mathbb{C}^m$ tels qu'il existe une forme η holomorphe telle que

$$\eta + \sum_1^m \lambda_k \omega_k,$$

soit exacte. Si $f \in \mathcal{E}(D)$ est une fonction méromorphe, alors sa différentielle $\mathrm{d}f$ s'écrit effectivement de la forme ci-dessus. Puisqu'une 1-forme holomorphe exacte est nulle, l'application $\mathrm{d}f \mapsto (\lambda_i)$ est injective. Elle associe à une fonction méromorphe ses résidus. Elle est également surjective grâce au théorème d'existence. Ainsi, $\dim \mathcal{E}(D) = \dim V + 1$.

Soit $\Gamma = (\mathrm{Re} \int_{\gamma_l} \omega_k)$ la matrice des périodes des formes ω_k.

Lemme 118. *L'espace V est défini par*

$$\Gamma \cdot \mathrm{Re}\lambda = \Gamma \cdot \mathrm{Im}\lambda = 0.$$

Démonstration. En effet, λ est dans V si et seulement si $\sum \lambda_k \omega_k$ a les même périodes complexes qu'une forme holomorphe. La condition implique les parties réelles des périodes sont nulles, ce qui est le cas si et seulement si la forme est nulle. □

Le théorème du rang implique alors que $\dim_{\mathbb{R}} V \geqslant 2m - 2g$. □

La description de la différence entre les deux termes est due à Roch, étudiant de Riemann.

Théorème 119. *On a*

$$\dim \mathcal{E}(D) = m - g + 1 + \dim \Omega(D),$$

où $\Omega(D)$ *est l'espace des formes holomorphes qui s'annule en chacun des* P_k.

9.4 Application à l'uniformisation

Théorème 120. *Une surface de Riemann de genre nul est biholomorphe à la sphère de Riemann.*

Démonstration. Il existe une fonction méromorphe n'ayant qu'un pôle simple, *i.e.* une application holomorphe de degré 1 vers $\mathbb{C}P^1$. □

Théorème 121. *Une surface de Riemann de genre* 1 *est un tore complexe.*

Démonstration. On a l'existence d'une 1-forme holomorphe ω non-nulle. Il n'existe pas de fonction méromorphe avec un pôle simple, sinon on aurait un biholomorphisme vers $\mathbb{C}P^1$. On en déduit qu'une forme holomorphe non-nulle ne s'annule jamais : le quotient aurait un pôle. On a le champ de vecteur dual : $\omega(X) = 1$. L'intégration de ce champ de vecteur fournit une action de $\mathbb{C}$. Comme X est non-singulier (ne s'annule pas), les orbites sont ouvertes, donc fermées. Ainsi, l'action est transitive, et S devient le quotient $\mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est le stabilisateur d'un point, nécessairement un sous-réseau de $\mathbb{C}$. □

9.5 Preuve du théorème de Riemann-Roch

9.5.1 Quelques ingérdients

On considère une surface de Riemann S. On a le résultat suivant concernant les 1-formes fermées qui sera plus tard appliqué au formes holomorphes.

Proposition 122. *Pour la base de* $H_1(S, \mathbb{Z})$ *formée par les* a_i *et* b_i, *et toutes* 1*-formes fermées, on a*

$$\int_X \eta \wedge \eta' = \sum_1^g \int_{a_i} \eta \int_{b_i} \eta' - \int_{a_i} \eta' \int_{b_i} \eta.$$

Démonstration. Vue en TD. □

Remarque 123. Si η et η' sont holomorphes, on a $\int_S \eta \wedge \eta' = 0$ car elles sont toutes deux proportionnelles à dz. De plus, si $\eta \neq 0$, $i \int_S \eta \wedge \overline{\eta} > 0$. En effet, si $\eta = A(z)\mathrm{d}z$ localement, on a

$$\eta \wedge \overline{\eta} = |A(z)|^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2i|A(z)|^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

♦

On déduit de la remarque précédente que $\omega \mapsto \int_{a_i} \omega$ est injective. En effet, si ω a toutes ses a-périodes nulles, on aurait $\int_S \omega \wedge \overline{\omega} = 0$, ce qui force $\omega = 0$. On en déduit que l'espace des formes holomorphes est de dimension $\leqslant g$. La dimension est en fait égale à g car elle a été calculée par le théorème d'existence.

Théorème 124. *Si la somme des résidus est nulle, et si l'on fixe les périodes sur les cycles a_i, il existe une unique forme méromorphe avec des pôles simples qui ait les périodes données.*

Il est possible de raffiner les relations de Riemann au cas des 1-formes méromorphes.

Proposition 125. *Soit ω_1 une 1-forme holomorphe (donc fermée), et ω_2 une 1-forme méromorphe nn singulière le long des courbes a_i, b_i. On pose pour un z_0 fixé $u(z) = \int_{z_0}^{z} \omega_1$, définie sur un domaine fondamental. On a*

$$2i\pi \sum \operatorname{Res}(u\omega_2) = \sum_1^g \int_{a_i} \omega_1 \int_{b_i} \omega_2 - \int_{a_i} \omega_2 \int_{b_i} \omega_1$$

Démonstration. Découle de la formule des résidus. □

9.5.2 Relations bilinéaires de Riemann

On choisit une base de l'espace des 1-formes holomorphes, qui est donc de dimension g. On peut considérer les matrices des périodes A et B, formées par les périodes des éléments de la base sur les cycles a_i, b_i :

$$A_{ij} = \int_{b_j} \omega_i \text{ et } B_{ij} = \int_{b_j} \omega_i.$$

On a le théorème suivant concernant les périodes, connues sous le nom de *relations bilinéaires de Riemann.*

Théorème 126. *A est inversible, et $A^{-1}B$ est symétrique de partie imaginaire définie positive.*

Démonstration. Soit $\omega = \sum \lambda_i \omega_i$. Si les A-périodes sont nulles, elles le sont aussi pour $\overline{\omega}$, ce qui implique que ω est nulle car $\int_S \omega \wedge \overline{\omega} = 0$, comme observé précédemment. La matrice est indépendante du choix de la base ω_i, on peut donc supposer que $A = I$, de sorte que $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. On a alors

$$0 = \int_S \omega_i \wedge \omega_j = \int_{b_i} \omega_j - \int_{b_j} \omega_i.$$

$$\lambda^T B \lambda = \frac{i}{2} \int_S \omega \wedge \overline{\omega} > 0.$$

□

9.5.3 Démonstration de Riemann-Roch

On procède comme pour l'inégalité de Riemann, mais dans le cadre $\mathbb{C}$-linéaire : on peut maintenant fixer les A-périodes plutôt que les parties réelles de toutes les périodes.
Soit ω_k la forme méromorphe de partie principale $\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ en P_k et dont toutes les A-périodes sont nulles. Soit V l'espace vectoriel des λ tel qu'il existe une 1-forme holomorphe η telle que

$$\eta + \sum \lambda_k \omega_k,$$

soit exacte. Comme dans la preuve de l'inégalité de Riemann, on a $\dim \mathcal{E}(D) = \dim V + 1$.
La différence est que V est maintenant $\ker H$, où $H = (\int_{b_i} \omega_j) \in \mathcal{M}_{gm}(\mathbb{C})$. De plus, la forme apparaissant dans la définition de V est toujours nulle. En effet, si $\sum \lambda_k \omega_k$ a les même périodes que $-\eta$, comme ses A-périodes sont nulles, η est nulle, et les B-périodes de $\sum \lambda_k \omega_k$ sont également nulles. Réciproquement, si les B-périodes de $\sum \lambda_k \omega_k$ sont nulles, ses A-périodes le sont par définition et elle est donc exacte, sans avoir besoin de corriger.

On applique encore le théorème du rang :

$$\dim \mathcal{E}(D) = m - \mathrm{rg} H + 1.$$

Pour conclure, il reste à déterminer le rang de H, *i.e.* $\dim \ker H^T$, où $H^T : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^m$ est l'application duale de H. Soit φ_l la base de l'espace des 1-formes holomorphes telle que

$$\int_{a_i} \varphi_l = \delta_{il}.$$

Lemme 127. *Un vecteur $\beta \in \mathbb{C}^g$ est dans $\ker H^T$ si et seulement si la forme holomorphe $\sum \beta_l \varphi_l$ s'annule en les P_k.*

Démonstration. On peut écrire localement en chaque P_k :

$$\varphi_l = (\lambda_l^k + \cdots)\mathrm{d}z_k.$$

La relation bilinéaire appliquée aux formes φ_l et ω_k donne donc

$$2i\pi \lambda_l^k = \sum_1^g \int_{a_i} \varphi_l \int_{b_i} \omega_k - \int_{a_i} \omega_k \int_{b_i} \varphi_l = \int_{b_l} \omega_k.$$

Donc $\frac{1}{2i\pi} H = (\varphi_l(P_k))$, ce qui permet de conclure. $\square$

Quatrième partie

Faisceaux et point de vue moderne sur Riemann-Roch

Chapitre 10

Fibrés en droites holomorphes

10.1 Fibrés en droites sur une surface de Riemann

On définit ici la notion de fibré en droite complexe.

Définition 128. Soit X une surface de Riemann. Un fibré en droite $\mathcal{L}$ est un espace topologique muni d'une projection $\pi : \mathcal{L} \to X$ continue telle que :

- chaque $\pi^{-1}(x)$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1,
- il existe un atlas trivialisant (U_i) muni d'applications $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ qui commutent à la projection,
- les $\phi_i|_{\pi^{-1}(x)}$ sont des isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev,
- on a des applications holomorphes $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ telles que

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} \quad \begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \\ (z, \xi) & \longmapsto & (z, g_{ij}(z)\xi) \end{array} .$$

Proposition 129. *Les g_{ij} vérifient les relations de cocycles :*

$$g_{ij} = g_{ji}^{-1} \text{ and } g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1.$$

Réciproquement, si on se donne un recouvrement (U_i) et un cocycle $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$, il est possible de construire un fibré en droites. L'espace total du fibré est obtenu en quotientant $\bigsqcup U_i \times \mathbb{C}$ par la relation $(x_i, \xi) \sim (x_j, g_{ij}(x)\xi)$. Un fibré en droites est en fait la donnée d'un recouvrement trivialisant, où il prend la forme $U_i \times \mathbb{C}$, et les fibres sont recollées entre elles.
Il est possible d'effectuer un changement de base sur chacun des ouverts, qui prend la forme d'une fonction $h_i : U_i \to \mathbb{C}^*$. Le cocycle est changé par $g_{ij}\frac{h_i}{h_j}$. Le cocycle $\frac{h_i}{h_j}$ est appelé cobord. Deux fibrés sont isomorphes si les cocycles associés diffèrent d'un cobord.

10.2 Exemples

Exemple 130. $*$ Le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$ est un fibré.

* Le fibré tautologique sur $\mathbb{C}P^1$ est

$$\mathcal{L} = \{(p, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 | v \in p\} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2.$$

  On prend le recouvrement $U_1 = \{[z : 1]\}$ et $U_2 = \{[1 : w]\}$. On a le cocycle $g_{12}(z) = \frac{1}{z}$. Ce fibré est noté $\mathcal{O}(-1)$. Plus généralement, on construit $\mathcal{O}(n)$ avec le cocycle $g_{12}(z) = z^n$. ♢

Pour chaque surface de Riemann, on peut construire son fibré tangent TX. Il suffit de considérer le cocycle $g_{ij}(z) = \mathrm{d}(\phi_i \circ \phi_j^{-1})$.

Exemple 131. Dans le cas de $\mathbb{C}P^1$, l'application de changement de carte est $z \mapsto \frac{1}{z}$, dont la dérivée est $-\frac{1}{z^2}$. Le fibré tangent est donc $\mathcal{O}(2)$. ♢

On définit de même le fibré cotangent, comme dual du fibré tangent.
On termine cette section par le fibré d'un point. Soit X une surface de Riemann et $p \in X$ un point. On considère U un voisinage du point avec une coordonnée locale $\varphi : U \to \mathbb{C}$. Le fibré d'un point $\mathcal{L}_p$ est donné par le cocycle $U \cup X \backslash \{p\}$ et le cocycle φ.

10.3 Sections d'un fibré

On considère un fibré holomorphe $\mathcal{L}$ sur une surface de Riemann X.

Définition 132. Une section de $\mathcal{L}$ est une application continue $s : X \to \mathcal{L}$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$. Elle est donc donnée par des applications $s_i : U_i \to \mathbb{C}$ telles que $s_i = g_{ij} s_j$. La section est holomorphe/méromorphe/C^∞ si les s_i le sont.

L'ensemble des sections holomorphes forme un espace vectoriel noté $H^0(X, \mathcal{L})$. Il sera interprété plus tard comme groupe de cohomologie. Le théorème de Riemann-Roch calcule la dimension de cet espace.

Exemple 133. Les sections de $\mathcal{O}(n)$ sont données par les polynômes de degré n. ♢

10.4 Opérations sur les fibrés

* Si $\mathcal{L}$ est un fibré holomorphe, on peut définir son dual $\mathcal{L}^* = \{(x, \lambda) | \lambda \in \pi^{-1}(x)^*\}$. Ses fonctions de transition sont données par $\frac{1}{g_{ij}}$.
* Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux fibrés, on a le produit tensoriel $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$, dont le cocycle est donné par $g_{ij} g'_{ij}$. Si s_1 est une section de $\mathcal{L}_1$ et s_2 une section de $\mathcal{L}_2$, alors $s_1 s_2$ est une section de $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$.
* Si $f : Y \to X$ est une application holomorphe, on a le pull-back $f^*\mathcal{L}$.

En particulier, si s_1, s_2 sont des sections de $\mathcal{L}$, alors $\frac{s_1}{s_2}$ est une fonction méromorphe sur X. Si $\dim H^0(X, \mathcal{L}) \geqslant 2$, alors il existe des fonctions méromorphes non constantes sur X.
On a une application $\psi : H^0(X, \mathcal{L}) \to H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p)$. Les éléments de l'image s'écrivent $s s_p$, et s'annulent donc en p.

Exemple 134. Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2. La droite projective $\mathbb{P}V$ est munie du fibrée antitautologique $\mathcal{O}(1)$. Chaque $\lambda \in V^*$ donne une section s_λ de $\mathcal{O}(1)$. Elle est définie par $s_\lambda(D) = \lambda|_D \in D^*$, où $D \in \mathbb{P}V$ est une droite de V. Soient D et D' deux droites distinctes. Toute droite distincte de D' est le graphe d'une application $u : D \to D'$. De plus, $D' \simeq V/D$. Ainsi,

$$T_D\mathbb{P}V \simeq \mathrm{Hom}(D, V/D).$$

Par le choix d'une forme symplectique ω, $V/D \simeq D^*$. Donc $T\mathbb{P}V = \mathcal{O}(2)$. ♢

10.5 Degré d'un fibré en droite

Dans cette section, on introduit un invariant topologique des fibrés en droites complexes, appelé *degré*, ou *classe de Chern*. Intrinsèquement, c'est un élément qui vit dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, qui est ici isomorphe à $\mathbb{Z}$. Il s'agit donc d'un nombre entier.

Lemme 135. *Tout fibré en droite admet une section s qui s'annule en un nombre fini de points. Pour un tel point x, on définit son indice* $\mathrm{Ind}_x(s)$ *comme le degré de l'application $s : U - \{x\} \to \mathbb{C}^*$.*

Lemme 136. *La quantité* $\sum_{s(x)=0} \mathrm{Ind}_x(s)$ *est indépendante du choix de s et s'appelle le degré du fibré.*

Exemple 137. Si s est une section holomorphe du fibré, on peut l'écrire dans une carte $s(z) = z^n$, et l'indice est donc n. ♢

Exemple 138. La section s_λ de $\mathcal{O}(1)$ s'annule en $\ker \lambda$, et le degré est donc 1. Le degré du fibré du point est 1 car la section donnée s'annule à l'ordre 1. ♢

Proposition 139. *Tout fibré admettant une section holomorphe est de degré positif. De manière équivalente, un fibré de degré négatif ne peut pas avoir de section holomorphe.*

Proposition 140. *On a* $\deg \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}' = \deg \mathcal{L} + \deg \mathcal{L}'$.

Proposition 141. *Si $\mathcal{L}$ a une section méromorphe s,* $\deg \mathcal{L} = \sum_x k_x(s)$.

Démonstration. On peut transformer la section méromorphe en section continue en remplaçant z^{-n} par $\frac{\overline{z}^n}{\varepsilon^{2n}}$ sur un voisinage du point. □

Proposition 142. *Le degré du fibré tangent est* $\deg T_X = \chi(X) = 2 - 2g$. *On en déduit que* $\deg K_X = 2g - 2$.

Démonstration. On prend une triangulation de X, et on choisit un champ de vecteur adéquat, qui part des sommets et converge vers le centre des faces. On a donc des zéros au centre de chaque face. L'indice vaut 1 pour les sommets et centres des triangles, mais -1 au centre des arêtes. □

Un corollaire de Riemann-Roch est que $h^0(X, K_X) = g$.

Proposition 143. $\deg f^*\mathcal{L} = \deg f \deg \mathcal{L}$.

Chapitre 11

Disgression sur les faisceaux et leur cohomologie

On introduit dans ce chapitre la notion de faisceau, un outil fondamental en géométrie algébrique. Les fibrés en droites fournissent des exemples naturels de faisceaux, mais nous en avons vu d'autres. Ces derniers fournissent un cadre agréable pour formuler le théorème de Riemann-Roch.

11.1 Faisceaux

Définition 144. Un faisceau en groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur X est un foncteur contravariant $\mathcal{F}$ depuis la catégorie des ouverts de X vers les groupes abéliens : à chaque ouvert U est associé un groupe $\mathcal{F}(U)$ dont les éléments sont appelés *sections* sur U, tel que

1. On a des applications de restrictions $r_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ pour chaque $U \subset V$,
2. pour tout recouvrement d'un ouvert et sections $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui coïncident sur les intersections, il existe une unique section globale $s \in \mathcal{F}(U)$ qui se restreigne en s_i sur chaque U_i.

Exemple 145.
* le faisceau C^0 des fonctions continues, C^∞ des fonctions lisses, $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes, $\mathcal{M}$ des fonctions méromorphes
* Le faisceau des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas $\mathcal{O}^\times$.
* les fonctions bornées n'est pas un faisceau
* le faisceau des 1-formes holomorphes
* le faisceau des 1-formes lisses, éventuellement d'un certain type.
* les fonctions *localement* constantes, les fonctions constantes ne forment en effet pas un faisceau.

$\diamondsuit$

Un morphisme de faisceau est une famille d'applications $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ qui commute aux restrictions. Un morphisme est dit injectif si les $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ sont injectifs. La notion de surjectivité est plus subtile car on demande seulement la surjectivité localement, et non pas celle de chaque $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

11.2 Cohomologie des faisceaux

11.2.1 Cohomologie associée à un recouvrement

On introduit une théorie homologique pour les faisceaux, appelée cohomologie de Cech. Soit X un espace muni d'un faisceau $\mathcal{F}$, et $\mathcal{U}$ un recouvrement de X. On pose

$$C^p_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{F}) = \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}).$$

On définit un opérateur de bord $\delta : C^p \to C^{p+1}$ définit comme suit : si $s \in \mathcal{F}(U_J)$,

$$\delta(s) = \sum_{i \in I} s|_{U_J \cap U_i}.$$

Attention : l'ordre des indices est important, on change le signe si l'on permute deux indices.

Exemple 146. Si l'on prend seulement deux ouverts. $\lozenge$

On vérifie que l'on obtient bien un complexe, dont les groupes d'homologie sont notés $H^p_{\mathcal{U}}(X, \mathcal{F})$.

Proposition 147. *Le $H^0(X, \mathcal{F})$ s'identifie à l'espace des sections globales de $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F}(X)$.*

11.2.2 Dépendance en le recouvrement

La définition donnée précédemment semble a priori dépendre de $\mathcal{U}$. On peut montrer que si $\mathcal{V}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, on peut construire un morphisme $H^\bullet_{\mathcal{U}} \to H^\bullet_{\mathcal{V}}$. Une manière d'obtenir des groupes indépendants du recouvrement est alors de prendre la limite inductive.
Un *bon* recouvrement est un recouvrement pour lequel $H^p(U_J, \mathcal{F}) = 0$ si $p > 0$.

11.2.3 Groupe de Picard

On peut maintenant interpréter en termes cohomologiques la définition de fibré en droites. Un fibré en droites est donné par un élément de $H^1(X, \mathcal{O}^\times)$.

11.2.4 Résultats admis

On admet trois résultats.

* Si X est une surface de Riemann et $\mathcal{L}$ un fibré en droites, alors $H^p(X, \mathcal{L}) = 0$ si $p \geqslant 2$, et est de dimension finie sinon.
* Si A est un groupe abélien, la cohomologie du faisceau constant à coefficients dans A est la même que la cohomologie singulière à coefficients dans A.
* On a la dualité de Serre $H^0(X, \mathcal{L}) \simeq H^1(X, K_X \otimes \mathcal{L}^{-1})^*$.

11.3 Suites exactes de faisceaux

Théorème 148. *On suppose que l'on a une suite exacte courte de faisceaux*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0.$$

On a alors une suite exacte longue en cohomologie

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

Exemple 149.

* On a la suite exacte exponentielle

  $$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to 0,$$

  qui fait apparaître le degré comme application $H^1(X, \mathcal{O}^\times) \to H^2(X, \mathbb{Z})$.
* On a la suite exacte

  $$0 \to \mathcal{O}^\times \to \mathcal{M}^\times \to \mathcal{M}^\times/\mathcal{O}^\times \to 0.$$

* On a

  $$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{O} \to K_X \to 0,$$

  donnée par le morphisme qui à une fonction holomorphe associe sa dérivée. On a en particulier le second connectant qui est

  $$H^1(X, K_X) \to H^2(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}.$$

$\Diamond$

11.3.1 Dualité de Serre

On dispose d'une application bilinéaire

$$H^0(X, K_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) \times H^1(X, \mathcal{L}) \longrightarrow H^1(X, K_X) \to \mathbb{C}.$$

La première flèche est définie canoniquement. La seconde flèche est donnée par l'intégration des formes différentielles sur X et le second connectant. Il est possible de généraliser le théorème en dimension plus grande où l'on obtient en fait un accouplement

$$H^p(X, \mathcal{L}) \times H^{n-p}(X, K_X \otimes \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow H^n(X, K_X) \longrightarrow H^{2n}(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C},$$

mais cela est plus compliqué.

Théorème 150. *(Serre, admis) Cet accouplement est une dualité parfaite : les noyaux des morphismes associés de l'un vers le dual de l'autre sont nuls. Les espaces ont en particulier même dimension.*

Exemple 151.

* En prenant $L = K$, on voit que $H^1(X, K_X) \simeq \mathbb{C}$.

$*$ Rappelons que l'on a l'application

$$H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p^{-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}),$$

dont l'image consiste en les sections qui s'annulent en p. On a la suite xacte qui définit le faisceau gratte-ciel $\mathcal{O}_p(\mathcal{L})$ qui vérifie $\mathcal{O}_p(\mathcal{L})(U) = \pi^{-1}(p)$ si $p \in U$ et 0 sinon :

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p^{-1} \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_p(\mathcal{L}) \to 0.$$

On en déduit la suite exacte longue

$$0 \to H^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p^{-1}) \to H^0(\mathcal{L}) \to \pi^{-1}(p) \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p^{-1}) \to \cdots$$

Le connectant est nul si et seulement si l'évaluation en p est surjective, ce qui signifie qu'il existe une section qui ne s'annule pas en p. On dit que $\mathcal{L}$ est sans point de base si tout point possède une section qui ne s'y annule pas.

$\Diamond$

Chapitre 12

Théorème de Riemann-Roch

12.1 Énoncé du théorème

Théorème 152. *Soit X une surface de Riemann et $\mathcal{L}$ un fibré en droites. On a*

$$\chi(X,\mathcal{L}) := h^0(X,\mathcal{L}) - h^1(X,\mathcal{L}) = \deg\mathcal{L} - g + 1.$$

Ceci peut encore s'écrire

$$h^0(X,\mathcal{L}) - h^0(X, K_X\otimes\mathcal{L}^{-1}) = \deg\mathcal{L} - g + 1.$$

Remarque 153. L'analogue en dimension plus grande s'appelle le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch. Il exprime la caractéristique d'Euler de fibrés vectoriels complexes (des concepts complexes) en fonction de certaines caractéristiques topologiques du fibré. Ici, on relie la dimension de l'espace des sections au genre et au degré du fibré. ♦

Exemple 154.

- ∗ En l'appliquant au fibré trivial, il vient $h^0(X,K) = h^1(X,\mathcal{O}) = g$.
- ∗ En l'appliquant à K il vient $h^0(X,K) = g$ puisque $\deg K = 2g-2$.
- ∗ En prenant $\mathcal{L} = T$, si $g \geqslant 2$, on a $h^0(X,K^2) = h^1(X,T) = 3g-3$, qui est la dimension de l'espace de module des courbes.

♢

12.2 Applications

12.2.1 Problème de Weierstrass

Théorème 155. *Si X surface de Riemann de genre g et $p_0,\dots,p_g$ $g+1$ points distincts, il existe une fonction méromorphe ayant des pôles au plus simples en les p_i.*

Démonstration. On a $h^0(X,\mathcal{L}_{p_0}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_{p_g}) \geqslant \deg\mathcal{L} - g + 1 = 2$. □

12.2.2 Uniformisation

Théorème 156. *Si X est une surface de Riemann de genre 0, elle est biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$.*

Démonstration. On a $h^0(X, \mathcal{L}_p) = 2$, ce qui fournit donc une fonction méromorphe ayant au plus un pôle simple en p. On a donc une application de degré 1 vers $\mathbb{C}P^1$, donc un biholomorphisme. □

12.2.3 Plongement de Kodaira

Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sans point de base, $s_0, \dots, s_N$ une base de sections de $H^0(X, \mathcal{L})$, on a une application

$$\Phi : x \in X \longmapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)] \in \mathbb{C}P^N.$$

Plus intrinsèquement, l'application est définie comme $X \to \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})^*)$, qui à un point p associe l'hyperplan de $H^0(X, \mathcal{L})$ des sections qui s'annulent en p. On a $\Phi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$.

Définition 157. Un fibré est dit très ample si l'application de Kodaira est un plongement.

Proposition 158. *Un fibré sans point de base est très ample si et seulement si pour tous p, q on a*

$$h^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_p^{-1} \otimes \mathcal{L}_q^{-1}) = h^0(X, \mathcal{L}) - 2.$$

Démonstration. On montre d'une part que Φ est injective, et d'autre part que la différentielle ne s'annule pas. □

Corollaire 159. *Si $\deg \mathcal{L} \geqslant 2g + 1$, $\mathcal{L}$ est très ample.*

Théorème 160. *Toute surface de Riemann est projective.*

Démonstration. On utlise le plongement de Kodaira. □

12.3 Preuve de Riemann-Roch

On a les groupes de cohomologie de Dolbeault :

$$H^{0,0} = \ker(\overline{\partial} : \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^{0,1}) = H^0(X, \mathcal{O}),$$

$$H^{1,0} = \ker(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{1,0} \to \mathcal{E}^2) = H^0(X, K),$$
$$H^{0,1} = \operatorname{coker}(\overline{\partial} : \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^{0,1}),$$
$$H^{1,1} = \operatorname{coker}(\overline{\partial} : \mathcal{E}^{1,0} \to \mathcal{E}^2).$$

On a également les applications

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & H^{1,0} & \longrightarrow & \overline{H^{0,1}} \\ & \alpha & \longmapsto & \overline{\alpha} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} B: & H^{1,0}\times H^{0,1} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \alpha,[\beta] & \longmapsto & \int_X \alpha\wedge\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} i: & H^{1,0} & \longrightarrow & H^1_{dR}(X,\mathbb{C}) \\ & \alpha & \longmapsto & [\alpha] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \nu: & H^{1,1} & \longrightarrow & H^2_{dR}(X,\mathbb{C}) \\ & [\eta] & \longmapsto & [\eta] \end{array}$$

Théorème 161. *(i) σ et ν sont des isomorphismes.*

(ii) B est une dualité parfaite

(iii) $(\alpha,\beta)\in H^{1,0}\oplus H^{0,1}\longmapsto i(\alpha)+\overline{i(\sigma^{-1}(\beta))}\in H^1(X,\mathbb{C})$ est un isomorphisme.

Démonstration. • Soit α une 1-forme holomorphe, *i.e.* un élément de $H^{1,0}$, qui est donc également fermée. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f\alpha) =& \mathrm{d}f\wedge\alpha + f\mathrm{d}\alpha \\ =& \partial f\wedge\alpha+\overline{\partial}f\wedge\alpha+0 \text{ car } \alpha \text{ fermée,} \\ =& 0+\overline{\partial}f\wedge\alpha \text{ car } \alpha \text{ et } \partial f \text{ sont propritionelles à } \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_X \alpha\wedge\overline{\partial}f = -\int_X \mathrm{d}(f\alpha)=0.$$

Cela montre que le produit est bien défini sur $H^{1,0}\otimes H^{0,1}\to\mathbb{C}$ car il passe au quotient sur $H^{0,1}$.

- Celui-ci est non dégénéré. En effet, si $\alpha=A(z)\mathrm{d}z$, $\overline{\alpha}=\overline{A(z)}\mathrm{d}\overline{z}$, et on a donc

$$\alpha\wedge\overline{\alpha}=|A(z)^2|\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\overline{z}=-2i|A(z)|^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

L'intégrale est donc non nulle excepté si α est nulle.

- ν est bien définie. En effet, si ω est une $(1,0)$-forme, $\overline{\partial}\omega=\mathrm{d}\omega$. On a donc quotienté par la même chose quand on fait

$$\nu:[\eta+\overline{\partial}\omega]\in H^{1,1}\longmapsto[\eta+\mathrm{d}\omega]\in H^2(X,\mathbb{C}).$$

C'est donc surjectif. Il reste à montrer l'injectivité. Si $\eta=\mathrm{d}\omega$, on souhaite écrire $\eta=\overline{\partial}\omega'$. Par Stokes, $\int_X\eta=0$, donc on peut écrire $\eta=\overline{\partial}\partial f$ grâce à la réslution de l'équation de Poisson.

- Montrons que σ est injective. Si $\alpha\in\ker\sigma$, on a $\overline{\alpha}=\overline{\partial}f$. Alors, on a

$$\Delta f=-2i\partial\overline{\partial}f=-2i\partial\overline{\alpha}=0.$$

Donc f est harmonique, donc constante, ce qui force $\alpha = 0$. Il reste à montrer la surjectivité. Soit β une 1-forme. On veut montrer que β s'écrit $\overline{\alpha} + \overline{\partial} f$ où $\overline{\partial}\alpha = 0$. Dans ce cas, on a nécessairement $-2i\partial\beta = \Delta f$. On peut donc trouver f si et seulement si $\int_X \beta = 0$, ce qui est le cas car $\partial\beta = \mathrm{d}\beta$. On vérifie alors que $\overline{\beta - \overline{\partial} f}$ est holomorphe, ce qui se fait sans peine.

- L'application envoie $(\alpha, [\beta])$ sur $[\alpha + \beta]$. Montrons que l'application est injective. Si

$$\alpha + \beta = \mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f,$$

alors $\theta = \overline{\partial} f$, donc $[\theta] = 0$, et $\alpha = \partial f$. Comme $\overline{\partial}\alpha = 0$, on a $\Delta f = 0$, ce qui force f à être constante, donc α à être nul également. Pour la surjectivité, si ω est une 1-forme fermée. On cherche f telle que

$$\overline{\partial}(\omega + \mathrm{d}f)^{1,0} = \overline{\partial}(\omega^{1,0} + \partial f) = 0.$$

Une telle solution existe car elle équivaut à l'équation de Poisson sur f avec la 2-forme $\overline{\partial}\omega^{1,0} = \mathrm{d}\omega^{1,0}$, dont l'intégrale est nulle par Stokes. On a donc

$$\omega + \mathrm{d}f = (\omega^{1,0} + \partial f) + (\omega^{0,1} + \overline{\partial} f).$$

Le premier terme est holomorphe car il a été choisi pour. Le second terme est bien une $(0,1)$-forme.

□

On a la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E}^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \to 0,$$

qui induit la suite exacte longue

$$0 \to H^0(\mathcal{O}) \to H^0(\mathcal{E}^0) \to H^0(\mathcal{E}^{0,1}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0.$$

On en déduit que $H^1(X, \mathcal{O}) \simeq H^{0,1}$. Les faisceaux $\mathcal{E}^{p,q}$ n'ont en effet pas de groupes d'homologie car ils sont fins.
On a la suite exacte courte

$$0 \to K_X \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{1,1} \to 0.$$

On en déduit de même une suite exacte longue

$$0 \to H^0(X, K_X) \to \mathcal{E}^{0,1}(X) \to \mathcal{E}^2(X) \to H^1(X, K_X) \to 0.$$

On en déduit que $H^1(X, K_X) \simeq H^{1,1}$.

Proposition 162. *On a Riemann-Roch et la dualité de Serre pour le fibré trivial.*

Démonstration. La dualité de Serre provient de la dualité de Poincaré. Riemann-Roch provient du calcul de la dimension des $\mathbb{C}$-ev □

On peut maintenant montrer Riemann-Roch et la dualité de Serre pour les fibrés holomorphes admettant des sections méromorphes, *i.e.* les fibrés de la forme $\bigotimes_i \mathcal{L}_{p_i}^{n_i}$.

Lemme 163. *On suppose que $\mathcal{L}$ vérifie RR et DS. Alors c'est aussi le cas de $\mathcal{L}\times\mathcal{L}_p$ et $\mathcal{O}\otimes\mathcal{L}_p^{-1}$.*

Démonstration. On utilise la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_p \to \mathcal{F}(p) \to 0,$$

où $\mathcal{F}(p)$ est un faisceau gratte-ciel en p. On en déduit la relation

$$\chi(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_p) = \chi(\mathcal{L}) + \chi(\mathcal{F}(p)) = \chi(\mathcal{L}) + 1.$$

Le faisceau gratte-ciel n'a en effet pas de cohomologie en degré strictement positif. On déduit donc Riemann-Roch pour $\mathcal{L}$ à partir de $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_p$ et réciproquement pusique les degrés diffèrent aussi de 1.
Pour la dualité de Serre, on utilise en plus la suite exacte courte

$$0 \to K_X\otimes\mathcal{L}^{-1}\otimes\mathcal{L}_p^{-1} \to K_X\otimes\mathcal{L}^{-1} \to (K_X\otimes\mathcal{L}^{-1})(p) \to 0.$$

On obtient une suite exacte longue à qui l'on applique le foncteur $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{C})$. On obtient alors l'échelle suivante :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^0(\mathcal{L}\mathcal{L}_p) \arrow[r] \arrow[d, "?"] & \mathcal{L}(p) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & H^1(\mathcal{L}\mathcal{L}_p) \arrow[r] \arrow[d, "?"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(K_X\mathcal{L}^{-1})^* \arrow[r] & H^1(K_X\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}_p^{-1})^* \arrow[r] & (K_X\mathcal{L}^{-1})(p)^* \arrow[r] & H^0(K_X\mathcal{L}^{-1})^* \arrow[r] & H^0(K_X\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}_p^{-1})^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq assure alors que les "?" sont également des isomorphismes, ce qui montre la dualité de Serre. $\square$

Pour conclure à la preuve de Riemann-Roch, il reste à montrer que tout fibré en droite holomorphe admet une section méromorphe, ce qui en fera l'un des $\bigotimes_i \mathcal{L}_{p_i}^{n_i}$. On peut se ramener au cas d'un fibré de degré 0. La suite exacte exponentielle donne

$$H^1(X, ZZ) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(X,\mathcal{O}^\times) \to H^2(X,\mathbb{Z}).$$

Le groupe des fibrés en droites de degré zéros, noté $\mathrm{Pic}^0(X)$ s'identifie donc à $H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$, qui est un tore complexe : $\mathbb{C}^g/\Lambda$. Il contient par exemple les $[\mathcal{L}_p\otimes\mathcal{L}_q^{-1}]$. La dualité de Serre fournit $H^1(X,\mathcal{O}) \simeq H^0(X,K_X)^*$. Comme de plus $H^1(X,\mathbb{Z}) \simeq H_1(X,\mathbb{Z})$, on peut également réécrire le tore comme

$$H^0(X,K_X)^*/H_1(X,\mathbb{Z}),$$

où $\gamma \longmapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega\right)$. L'élément $\mathcal{L}_p\otimes\mathcal{L}_q^{-1}$ est identifié à $\omega \mapsto \int_\gamma \omega$, où ω est un chemin de p à q. Le résultat ne dépend pas de la classe d'homotopie du chemin.

On fixe $p_0 \in X$. On va montrer qu'il existe n tel que

$$\Phi_n : (p_1, \ldots, p_n) \longmapsto \mathcal{L}_{p_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_{p_n} \otimes \mathcal{L}_{p_0}^{-n},$$

soit surjective. Pour cela, on va seulement montrer que $\mathrm{d}\Phi_n$ est surjective, cela montrera qu'elle est ouverte, donc surjective. On a la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O} \to \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{p_i} \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}(p_i) \to 0.$$

On a dans la suite longue associée

$$\cdots \to H^0\left(X, \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}(p_i)\right) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1\left(X, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{p_i}\right).$$

Par dualité de Serre, $H^1\left(X, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{p_i}\right) \simeq H^0\left(K_X \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{p_i}^{-1}\right)$, qui devient de degré négatif, donc nul quand n est suffisamment grand. Le connectant est alors surjectif. Ce connectant s'identifie à $\mathrm{d}\Phi_n$, ce qui achève la preuve.