Université de Genève
20 Février 2023

Série n$^{\mathrm{o}}$1

Exercice 1

1. Montrer que le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.
2. Montrer que $u \wedge v = 0$ si et seulement si (u, v) est liée.
3. Montrer que $u \wedge v$ est orthogonal à u et v.
4. Montrer que

$$\langle u \wedge v, x \wedge y\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u, x\rangle & \langle v, x\rangle \\ \langle u, y\rangle & \langle v, y\rangle \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Montrer que $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$.
2. En déduire que

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

Cela fait de $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel une algèbre de Lie.

3. Montrer que l'algèbre de Lie précédente est isomorphe à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) munie du crochet $[A, B] = AB - BA$. On pourra envoyer utiliser le morphisme $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x \wedge \cdot \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Montrer que si $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sont des fonctions dérivables, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \wedge v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \wedge v + u \wedge \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u, v\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, v \right\rangle + \left\langle u, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right\rangle.$$

Exercice 4

Quel est le lieu géométrique donné par la paramétrisation

$$t \longmapsto \left(a\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, b\frac{2t}{1 + t^2} \right).$$

Exercice 5

Tracer les courbes suivantes.

1. (Astroïde) $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$. (on pourra restreindre l'étude à $[0; \pi/4]$.) Calculer la longueur de la courbe.
2. (lemniscate) $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$. (Observer la symétrie $t \mapsto \frac{1}{t}$)

Université de Genève
27 Février 2023

Géométrie Différentielle

Série n$^{\text{o}}$2

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une fonction lisse dont l'image est inclus dans la courbe cuspidale $\{y^2 = x^3\}$ et $\varphi(0) = 0$. Montrer que l'on a $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 2

Tracer les courbes suivantes.

1. (cardioïde) $t \mapsto (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$.
2. (folium de Descartes) $t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right)$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{C}$ une courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par un polynôme de degré 2. On se donne un point P de $\mathscr{C}$.

1. En considérant les droites qui passent par P, montrer qu'il est possible de paramétrer $\mathscr{C}$ par des fractions rationnelles.
2. L'appliquer pour la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et $P = (-1, 0)$.
3. L'appliquer pour la courbe d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $P = (-1, 0)$.

Exercice 4

On considère la courbe paramétrée $\varphi : t \in]0; +\infty[\mapsto (t^2, t^3)$. Montrer que la longueur d'arc à partir de 0 est donnée par

$$l(t) = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

Exercice 5

1. Est-il possible de calculer l'aire d'une ellipse ?
2. Est-il possible de calculer le périmètre d'une ellipse ?

Série n$^{\text{o}}$3

Exercice 1 : coordonnées polaires et courbes polaire

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $u_r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $u_\theta(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. (Faire un dessin)

1. Calculer $\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\theta}$ ainsi que $\frac{\mathrm{d}u_\theta}{\mathrm{d}\theta}$.

2. On dit qu'une courbe est donnée en coordonnées polaires si elle est donnée par une paramétrisation $\varphi : \theta \mapsto r(\theta)u_r(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\varphi' = r'u_r + ru_\theta$.

b) En déduire que $\|\varphi'\|^2 = r^2 + (r')^2$.

3. Tracer les courbes suivantes en coordonnées polaires : (pour ce faire, réaliser les variations de r, et trouver les points d'annulation de r et r', attention si r est négatif)

a) $r(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$

b) $r(\theta) = 2\cos(\theta) + 1$

Exercice 2 : une formule explicite pour la courbure

1. On considère un arc paramétré $\varphi(t)$. Montrer que la courbure est donnée par la formule

$$\kappa(t) = \frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t))}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

Cette formule est utile car elle permet de s'affranchir de la recherche de l'abscisse curviligne, qui n'est pas toujours exprimable.

2. En déduire que la courbure d'une courbe donnée en coordonnées polaire est donnée par

$$\kappa(\theta) = \frac{2(r')^2 + rr'' - r^2}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}.$$

Exercice 3 : la cubique nodale

On considère la cubique nodale $y^2 = x^3 + x^2$.

1. En considérant les droites passant par 0 et dirigées par $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, donner une paramétrisation de la courbe.

2. Se servir de la paramétrisation trouvée : $t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ pour tracer la courbe.

3. Calculer la courbure. (On pourra utiliser la formule $\kappa(t) = \frac{\det(\varphi'(t),\varphi''(t))}{\|\varphi'(t)\|^3}$.)

Exercice 4 : le retour de la cardioïde

On considère la cardioïde donnée en coordonnées polaires par $r = a(1 + \cos\theta)$.

1. Tracer la courbe.
2. Calculer son aire.
3. Calculer sa courbure.

Exercice 5

On considère le graphe d'une fonction comme courbe paramétrée : $t \mapsto (t, f(t))$.

1. Donner une expression pour la longueur entre les points de paramètre a et b.
2. Calculer la courbure.

Série n^{o}4

Exercice 1
Calculer les vecteurs T, N, B, la courbure κ et la torsion τ pour la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto (\sqrt{1+t^2}, t, \log\sqrt{1+t^2}).$$

Exercice 2
Calculer les vecteurs T, N, B, la courbure κ et la torsion τ pour la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in]-1;1[\longmapsto \left(\frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right).$$

Exercice 3
1. Soit Γ une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer Γ est une portion de droite.
2. Soit Γ une courbe gauche telle que toutes les normales passent par un même point. Montrer que Γ est une portion de cercle.

Exercice 4
Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $s_0 \in I$ tel que $\|\varphi(s)\| \leqslant \|\varphi(s_0)\|$ pour tout s au voisinage de s_0. Montrer que

$$\kappa(s_0) \geqslant \frac{1}{\|\varphi(s_0)\|}.$$

On pourra étudier la fonction $f(s) = \|\varphi(s)\|^2$.

Exercice 5
Soit $t \in [a;b] \mapsto X(t)$ une fonction vectorielle lisse à valeur dans S^2. On suppose que $(X(t), X'(t), X''(t))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et on considère

$$\varphi(t) = c\int_a^t X(s) \wedge X'(s)\mathrm{d}s.$$

Montrer que la courbe géométrique Γ_φ a une torsion constante égale à $1/c$. On pourra montrer que le vecteur binormal est proportionnel à $X(t)$.

Exercice 6

On considère une courbe régulière paramétrée dans $\mathbb{R}^3$. Soit π la projection orthogonale sur le plan osculateur à Γ en $\varphi(t)$. Montrer que la courbure en t de la courbe plane $\pi \circ \varphi(\mathbb{R})$ est égale à $\varphi(t)$.

Exercice 7
Soient $t \in I \mapsto A(t), M(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ deux familles lisses de matrices réelles. On suppose que les matrices $A(t)$ sont antisymétriques. On suppose enfin que $M'(t) = A(t)M(t)$.

1. On suppose que $M(a) = I_3$ pour un certain $a \in I$. Montrer que $M(t) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ pour tout $t \in I$.

2. On suppose que $M(a) = 0$ pour un certain $a \in I$. Montrer que $M(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 8
1. Montrer que la paramétrisation par la longueur d'arc de l'hélice circulaire

$$\varphi : t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt),$$

est donnée par

$$\psi(s) = \left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

2. Calculer la courbure et la torsion.

3. Calculer la tangente à l'hélice et montrer qu'elle fait un angle constant avec l'axe (Oz).

Exercice 9
1. Montrer que la longueur d'arc, la courbure et la torsion d'une courbe gauche sont tous invariants par isométrie positive.

2. Étudier la manière dont laquelle une homothétie transforme ces mêmes quantités.

Exercice 10
La développée d'une courbe est le lieu de ses centres de courbures. Elle est donc paramétrée par

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t).$$

1. Montrer que la tangente à la développée est portée par la normale à la courbe en $\varphi(t)$.

2. Montrer que la développée de la parabole $y = ax^2$ a pour équation $27x^2 = 16a(y - 1/2a)^3$.

Série n$^{\mathrm{o}}$6

Exercice 1
Soit Γ une courbe plane fermée simple dont la courbure vérifie $0 \leqslant \kappa \leqslant C$. Montrer que

$$l(\Gamma) \geqslant \frac{2\pi}{C}.$$

(On pourra utiliser l'inégalité isopérimétrique et considérer le cercle osculateur en un point de courbure maximale.)

Exercice 2
Soit Γ une courbe plane fermée contenue dans un disque de rayon R. Montrer qu'il existe un point où la courbure est supérieure à $\frac{1}{R}$.
(On pourra prendre un cercle minimal contenant la courbe, et regarder la courbure en un point de contact entre la courbe et le cercle.)

Exercice 3
Soit Γ une courbe plane. Un extremum de courbure est appelé “sommet”.

1. Montrer que tout point d'un cercle est un sommet.
2. Montrer qu'une ellipse a 4 sommets.
3. Soit Γ une courbe fermée simple. Montrer qu'elle a au moins 4 sommets.

Exercice 4
On considère le tore de révolution paramétré par

$$\varphi : (u, v) \longmapsto ((r\cos u + R)\cos v, (r\cos u + R)\sin v, r\sin u)\,.$$

Puis on considère la courbe paramétrée $t \mapsto \varphi(at, bt)$.

1. Montrer que la courbe est fermée si et seulement si $\frac{b}{a}$ est rationnel.
2. Montrer que si $\frac{b}{a}$ est irrationnel, l'image est dense dans le tore.

Exercice 5
Soit $\varphi : s \in I \to \mathbb{R}^3$ une courbe gauche. On note κ et τ sa courbure et torsion dont on suppose qu'elle ne s'annulent pas. On note également $R = \frac{1}{\kappa}$ et $\delta = \frac{1}{\tau}$.

1. Montrer que si Γ est tracée sur une sphère, alors la fonction $R^2 + (R')^2\delta^2$ est constante. (*Ind :* supposer que la sphère est centrée en 0 et dériver trois fois l'égalité $\|\varphi(s)\|^2 = r$.)
2. On suppose réciproquement que $R^2 + (R')^2\delta^2$ est constante.

a) Montrer que $\varphi(s) + R(s)N(s) - R'(s)\delta(s)B(s)$ est constante.
b) En déduire que Γ est tracée sur une sphère.

Série n^{o}7

Exercice 1
Soit E un espace euclidien et u une isométrie (vectorielle).

1. Quelles sont les valeurs propres possibles ? Montrer que les espaces propres associés sont orthogonaux.

2. Montrer que si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est également stable.

3. a) En considérant un vecteur annulé par un certain $u^2 + au + b$, montrer que u admet un vecteur propre ou un plan stable.
b) En procédant par récurrence, montrer qu'il existe une base orthogonale dans laquelle la matrice de u est diagonale par bloc qui sont des 1, -1 ou bien des blocs de rotation $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

4. En déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Quelles sont les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 2

1. On appelle retournement la composée de deux réflexions par rapport à des axes orthogonaux. En utilisant le fait que $O_n(\mathbb{R})$ est généré par des réflexions, montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est généré par les retournements.

2. En déduire une seconde preuve de la connexité par arcs de $SO_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3
On pose $U =]0; \pi[\times]0; 2\pi[$, et $\varphi(u, v) = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u)$ pour $(u, v) \in U$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une nappe régulière qui paramétrise une partie de la sphère S^2.

2. Donner une seconde nappe de sorte que la réunion recouvre la totalité de S^2.

3. Est-il possible de recouvrir la sphère unité à l'aide d'une seule nappe ?

4. Calculer l'aire de S^2 à l'aide d'une de ces nappes.

Exercice 4
Soit C le cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une surface régulière sauf en 0.

2. Montrer qu'il n'existe pas de paramétrisation régulière $\varphi : B^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\varphi(B^2) \subset C$ et $\varphi(0) = 0$.

Exercice 5
On considère la quadrique d'équation $xy + yz = 1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une surface régulière.

2. Donner les caractéristiques de la quadrique (dans la case adéquate de la classification).

Série n$^{\text{o}}$8

Exercice 1 : parapluie de Whitney
On considère la nappe $\varphi(u, v) = (uv, v, u^2)$.

1. Montrer que la demi-droite $\{x = y = 0, z > 0\}$ est formée de points doubles et que 0 est un point singulier.

2. Montrer que pour $v \neq 0$, le vecteur $\left(-\frac{2u}{v}, \frac{2u^2}{v}, 1\right)$ est normal mais n'admet pas de limite quand $(u, v) \to (0, 0)$.

Exercice 2
Expliciter les coefficients de la première forme fondamentale des surfaces suivantes :

- $*$ cylindre $(\theta, s) \mapsto (R\cos\theta, R\sin\theta, s)$,
- $*$ caténoïde $(u, v) \mapsto (\text{ch}u\cos v, \text{ch}u\sin v, u)$
- $*$ hélicoïde $(u, v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, v)$.

Exercice 3
On considère le tore de paramétrisation

$$\varphi(u, v) = ([R + r\cos u]\cos v, [R + r\cos u]\sin v, r\sin u.$$

1. Calculer la première forme fondamentale.
2. Calculer l'aire du tore.

Exercice 4
Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe gauche dont la courbure ne s'annule pas. On considère la surface tubulaire

$$\varphi(s, \theta) = \alpha(s) + \varepsilon(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s).$$

1. Calculer le vecteur normal à la surface.
2. En déduire l'aire de la surface.

Exercice 5
On considère une surface de révolution paramétrée par

$$(s, \theta) \mapsto (f(s)\cos\theta, f(s)\sin\theta, h(s)).$$

On suppose la courbe $s \mapsto (f(s), h(s))$ paramétrée par la longueur d'arc.

1. Calculer la première forme fondamentale.
2. Montrer que l'aire est donnée par $2\pi\int_0^L |f(s)|\mathrm{d}s$.
3. En déduire l'aire de la sphère et du tore de révolution.

Série n$^{\text{o}}$9

Exercice 1

Soit S une surface régulière et P un plan affine.

1. Montrer que si P et S ne s'intersectent qu'en un point, P est tangent à S.
2. Que penser de la réciproque ?

Exercice 2

On considère une surface telle que les normales à la surface soient concourantes. Montrer q'il s'agit d'une portion de sphère.

Exercice 3

On considère une surface telle que les normales passent toutes par une même droite. Montrer que la surface est de révolution.

Exercice 4

Soit S une surface de révolution. Montrer qu'il existe une paramétrisation dans laquelle

$$E = E(v), F = 0, G = 1.$$

Exercice 5

On considère la sphère paramétrée par

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

1. Rappeler ou recalculer la primère forme fondamentale de la sphère.

Soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On définit une *loxodromie* par une courbe qui effectue un angle constant α avec les méridiens.

2. Montrer que la loxodomie peut-être paramétrée par

$$u = \tan \alpha \log \left(\tan \frac{v}{2} \right),$$

pour v allant de 0 à π.

3. Calculer le vecteur tangent et sa norme.
4. En déduire la longueur de la loxodromie.

Série n$^{\text{o}}$10

Exercice 1
Soit $N : S \to S^2$ l'application de Gauss d'une surface régulière, et soit $\alpha : I \to S$ une courbe paramétrée qui évite les points planaires et hyperboliques (la seconde forme fondamentale est non dégérénére). Montrer que $N \circ \alpha$ définit une courbe régulière dans S^2.

Exercice 2
Soit S une surface paramétrée.

1. Montrer que si F_p est nul en tout point, la surface est incluse dans un plan. (On pourra montrer que N est constant)

2. Montrer que si la surface est incluse dans une sphère, F_p est une homothétie dont on calculera le rapport.

3. Que dire de la réciproque à la question précédente ?

Exercice 3
Soit S donnée par le graphe d'une fonction h.

1. Donner l'expression de la second forme fndamentale.

2. Montrer que la courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}$$

Exercice 4
On considère l'ellipsoïde

$$E = \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}.$$

1. Pour p un point, on note d la distance de 0 au plan tangent à p. Montrer que la courbure de Gauss est donnée par

$$K_p = \frac{d^4}{a^2b^2c^2}.$$

2. Montrer que la sphère et l'ellipsoïde sont difféomorphes mais pas isométriques si $(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$.

Exercice 5
Montrer qu'un tore de révolution n'a aucun ombilic (point où les courbures principales coïncident).

Exercice 6

1. Calculer la courbure de la surface de révolution $(t, \theta) \mapsto (t \sin \theta, t \cos \theta, \log t)$.
2. On considère l'hélicoïde $(t, \theta) \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta)$. Montrer que la courbure est la même.
3. Montrer qu'ils ne sont pas localement isométriques.

Série n$^{\text{o}}$11

On rappelle le théorème de Gauss-Bonnet : Pour un domaine régulier R d'une surface à bord et coins orientée dans $\mathbb{R}^3$, C_j les arcs réguliers au bord du domaine et θ_j les angles extérieurs, on a

$$\sum_j \int_{C_j} \kappa_g(s)\mathrm{d}s + \int\int_R K\mathrm{d}\sigma + \sum_k \theta_k = 2\pi\chi(R).$$

Exercice 1
On considère l'hyperboloïde défini par

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

1. a) Montrer qu'il est paramétré par $\varphi(u, v) = (\mathrm{ch}(u)\cos v, \mathrm{ch}(u)\sin v, \mathrm{sh}(u))$.
b) Calculer le vecteur normal et les deux formes fondamentales.

2. a) Calculer la courbure de Gauss et montrer qu'elle est négative.
b) Calculer la courbure moyenne, vérifier qu'elle est de signe constant et ne s'annule que le long du cercle $z = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3. Montrer que la surface est réglée : il est possible de la couvrir par des droites $D_\alpha = \{(t\cos\alpha - \sin\alpha, t\sin\alpha + \cos\alpha, t)\}$.

4. Soit $\gamma : [a; b] \to S$ un arc paramétré tracé sur la surface. On pose $m(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$. Vérifier que

$$T(t) = m(t)\gamma'(t) \text{ and } \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = m(t)^2\gamma''(t) + m(t)m'(t)\gamma'(t).$$

a) La *courbure normale* de la courbe est définie comme le projeté de $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}$ sur le vecteur normal à S. La *courbure géodésique* par son projeté sur le plan tangent. Montrer que la courbure géodésique peut s'exprimer

$$\kappa_g = \det(N, T, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}) = m(t)^3 \det(N, \gamma', \gamma'').$$

5. Calculer la courbure géodésique des courbes suivantes : $u = u_0$, $v = v_0$, D_α. Lesquelles sont des géodésiques ? (de courbure géodésique nulle)

6. Dessiner D_0, $D_{\pi/2}$ et les plans $z = 0$, $z = 1$.

7. On considère le domaine délimité par les portions de droite D_0 et $D_{\pi/2}$ d'altitude contenue entre 0 et 1, ainsi que les deux quarts de cercles reliant les extrémités. (faire un dessin) Ecrire la formule de Gauss-Bonnet pour ce domaine.

8. En calculant les angles aux sommets et la courbure des côtés, déduire l'intégrale de la courbure de Gauss sur ce domaine.

Révision Examen

Exercice 1

1. Donner la définition d'une courbe régulière.

2. Les courbes suivantes sont-elles régulières ?
a) $x^2 - y^3 = 1$,
b) $x^2 - y^3 = 0$,
c) $x^2 + xy + y^2 = 1$.

3. Rappeler la définition de la paramétrisation par longueur d'arc.

Exercice 2

1. Rappeler la définition du repère de Frenet.

2. Calculer le repère de Frenet, la courbure et torsion de $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (t, t^2, t^5)$.

Exercice 3

On considère $S = \{(x, y, xy)\}$.

1. Calculer la première forme fondamentale.

2. Trouver le vecteur normal.

3. Trouver la seconde forme fondamentale.

4. Trouver les directions des courbures principales.

5. Trouver la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

6. Existe-t-il des ombilics ?

Exercice 4

On considère la surface $S = \{(x, y, f(x, y)) | -1 \leqslant x, y \leqslant 1\}$, où $f(x, y) = 0$ si $x = \pm 1$ ou $y = \pm 1$.

1. Montrer que l'aire de la surface est plus grande que 4.

2. Démontrer que les points de la frontière sont paraboliques (ou planaire).

3. En supposant f non nulle, démontrer que S contient en son intérieur un point non-hyperbolique.