

Notes de cours - Analyse Fonctionnelle

Thomas Blomme

10 août 2023

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Rappels sur les espaces métriques	3
1.2	Espaces normés	4
1.3	Complétude des espaces métriques et normés	5
1.4	Les espaces normés en dimension finie	6
1.5	Compacité en dimension finie	9
2	Opérateurs	11
2.1	Définition et exemples	11
2.2	Opérateurs et continuité	12
2.3	Espace des opérateurs et complétude	14
3	Espaces de Banach	16
3.1	Complétion d'un espace métrique	16
3.2	Théorème de Baire	17
3.3	Théorème de l'application ouverte	18
4	Dualité	20
4.1	Espace Dual	20
4.2	Théorème de Hahn-Banach	23
4.3	Topologie faibles	26
4.4	Théorème de Représentation de Riesz-Markov	26
5	Espaces de Hilbert	32
5.1	Produit scalaire et norme	32
5.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités remarquables	33
5.3	Orthogonalité	34
5.4	Théorèmes de projection	36
5.5	Bases Hilbertiennes	39
6	Opérateurs entre espaces de Hilbert	42
6.1	Théorème de représentation de Riesz	42
6.2	Opérateur adjoint	43
6.3	Réflexivité des espaces de Hilbert	45

7	Espaces L^p	47
7.1	Espace des fonctions intégrables	47
7.2	Espace des fonctions à carré intégrable	48
7.3	Espaces $L^p(A)$	50
7.4	Sous-espaces denses	51
8	Compacité	52
8.1	Compacité dans les espaces de fonctions continues	52
8.2	Opérateurs compacts	55
8.3	Opérateurs de Hilbert-Schmidt	57
9	Applications à la théorie de Fourier	59
9.1	Convergence L^2	59
9.2	Convergence ponctuelle	60
9.3	Théorème de Dirichlet	61
9.4	Intervention de l'analyse fonctionnelle	62
10	Applications à la transformée de Fourier	63
10.1	Transformée de Fourier d'une fonction intégrable	63
10.2	Inversion	64
10.3	Transformée de Fourier sur L^2	65
10.4	Non surjectivité dans le cas intégrable	66
11	Théorie Spectrale	67
11.1	Spectre et valeurs propres d'un opérateur	67
11.2	Spectre d'un opérateur autoadjoint	68
12	Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints	72

Chapitre 1

Introduction

1.1 Rappels sur les espaces métriques

Définition 1.1.1. Un espace métrique est la donnée d'une paire (X, d) , où X est un ensemble muni d'une distance $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ satisfaisant :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$.

Un sous-espace de (X, d) , noté (Y, d) , est obtenu en prenant un sous-ensemble Y de X et en restreignant la métrique d à $Y \times Y$.

Exemples 1.1.2. 1. L'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est un espace métrique où $X = \mathbb{R}^n$ et pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, la métrique euclidienne est définie par :

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

On peut également regarder d'autres distances sur $\mathbb{R}^n$ comme par exemple :

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

2. On considère $l^\infty(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{C} \forall n \mid \|x\|_\infty \leq c_x \in \mathbb{R}\}$. On munit cet espace de la métrique :

$$d(x, y) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|$$

où $y = (y_n) \in l^\infty(\mathbb{C})$.

3. Prenons X un espace compact ; par exemple $[a, b] \subset \mathbb{R}$, et on regarde $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X . On peut alors prendre comme métrique :

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

où $f, g \in C(X)$.

4. Soit X un ensemble. On peut lui associer la métrique discrète, pour $x, y \in X$:

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = 1 \quad (x \neq y).$$

1.2 Espaces normés

Définition 1.2.1. Un espace normé X est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) muni d'une norme, c'est-à-dire une application $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ vérifiant :

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in X \forall \alpha \in \mathbb{K}$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Remarque 1.2.2. Un espace normé X est en particulier un espace métrique. En effet, il suffit de poser

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Exemple 1.2.3.

Soit $1 \leq p < \infty$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

L'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

implique que cette formule définit une norme. De plus, on verra que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est un *espace de Banach*. On peut plus généralement considérer l'espace $\ell^p(\mathbb{C})$ des suites telles que $\sum |x_n|^p < \infty$.

Définition 1.2.4. Soit X un espace vectoriel et soit $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ deux normes sur X . On dit que $\|\cdot\|_b$ est équivalente à $\|\cdot\|_a$ s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que :

$$\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a \quad \forall x \in X.$$

On note alors $\|\cdot\|_a \asymp \|\cdot\|_b$.

Remarques 1.2.5. 1. $\asymp$ est une relation d'équivalence.

2. Deux normes équivalentes induisent la même topologie sur X .

Exemple 1.2.6. Les normes $\|x\|_2$ et $\|x\|_1$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Les normes $\|f\|_\infty$ et $\|f\|_1$ ne le sont pas sur $L^\infty[0; 1]$.

Définition 1.2.7. Un sous-espace Y d'un espace normé X est un sous-espace vectoriel muni de la norme de X restreinte à Y .

Définition 1.2.8. Un sous-espace $D \subset E$ est *dense* dans E si $\overline{D} = E$, i.e. si pour tout $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ il existe $y \in D$ tel que $\|x - y\| < \varepsilon$.

1.3 Complétude des espaces métriques et normés

On définit dans cette section la notion de complétude, qui sera étudiée plus avant dans le chapitre des espaces de Banach.

Définition 1.3.1. Une suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset X$ dans un espace normé est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Définition 1.3.2. Un espace normé E est dit complet si toutes suites de Cauchy convergent vers une limite dans E . Un espace normé complet est appelé un espace de Banach.

Définition 1.3.3. Une série d'éléments de E est dite

- convergente si la suite des sommes partielles est convergente,
- absolument convergente si $\sum \|x_n\| < \infty$.

Proposition 1.3.4. Un espace E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Si l'espace est complet, la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy, donc convergente. Réciproquement, si u est une suite de Cauchy, il existe une suite extraite telle que $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{2^n}$. La série associée est donc convergente, ce qui prouve que u converge. $\square$

Proposition 1.3.5. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $l^p(\mathbb{C})$ l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

Alors $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l^p est complet. Soit $(x^{(k)})_k$ une suite de Cauchy dans l^p . Soit $\varepsilon > 0$, par définition il existe N_ε tel que

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

En particulier, on en tire que pour tout k :

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon.$$

Ainsi à k fixé, la suite $(x_k^{(n)})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Par complétude, la limite existe. On pose donc $y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$. La suite $y = (y_k)_{k \geq 1}$ est notre candidat comme limite de la

suite $(x^{(n)})_n$.

Soit $I \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \geq N_\varepsilon$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^I |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^p \right)^{1/p} \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon.$$

En faisant tendre $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^I |x_k^{(n)} - y_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

I étant arbitraire, en le faisant tendre vers l'infini, on déduit :

$$\|x^{(n)} - y\|_p < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

De plus $y \in l^p$ car $(x^{(n)} - y) \in l^p$ et $y = -(x^{(n)} - y) + x^{(n)}$. □

Exemples 1.3.6. 1. $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, où la norme suprémum est définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

2. $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est également un espace de Banach.

Non-Exemple 1.3.7. $C[a, b]$ muni de la norme

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

n'est pas complet. Il suffit de considérer $f_n(x) := x^n$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Remarque 1.3.8. Un sous-espace Y d'un espace de Banach X n'est pas nécessairement un espace de Banach.

Question 1.3.9. Quand est-ce qu'un sous-espace Y est complet ?

Proposition 1.3.10. Soit Y un sous-espace d'un espace de Banach X est complet si et seulement si Y est fermé dans X .

Démonstration. Preuve vue en topologie dans le cas des espaces métriques. □

1.4 Les espaces normés en dimension finie

On s'intéresse pour le moment aux espaces de dimension finie.

Lemme 1.4.1 (Lemme utile). Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans un espace normé X . Alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|) \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}. \quad (1.1)$$

Démonstration. Posons $s = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$. Et remarquons que si $s = 0$, alors l'équation 1.1 est trivialement vraie pour tout $c > 0$. On suppose donc que $s \neq 0$ et quitte à diviser par s , il suffit de démontrer qu'il existe un $c > 0$ tel que :

$$\|\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c,$$

pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$.

Supposons par l'absurde qu'un tel c n'existe pas. Il existe donc une suite (y_m) de vecteurs de la forme :

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| = 1$$

tels que $\|y_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Pour tout j fixé, on a :

$$|\beta_j^{(m)}| \leq \sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| \leq 1.$$

Ainsi pour tout j fixé, la suite $(\beta_j^{(m)})_{m \geq 1}$ est une suite bornée. Ainsi par Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente. Notons β_1 la limite de la sous-suite de $(\beta_1^{(m)})$. Considérons alors $(y_{1,m})$ la sous-suite correspondante de (y_m) . En répétant l'argument, $(y_{1,m})$ possède une sous-suite $(y_{2,m})$ pour laquelle la sous-suite de scalaires de $\beta_2^{(m)}$ converge vers β_2 . Ainsi après n étapes, on se retrouve avec une sous-suite $(y_{n,m})$ de (y_m) de la forme :

$$y_{n,m} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(m)} x_j, \quad \sum_{j=1}^n |\gamma_j^{(m)}| = 1$$

et où $\gamma_j^{(m)} \rightarrow \beta_j$ quand $m \rightarrow \infty$. Ainsi

$$y_{n,m} \rightarrow y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j, \quad \sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1.$$

Comme $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$ et que la famille est linéairement indépendante, alors $y \neq 0$. Cependant par continuité de la norme, on a :

$$\|y_{n,m}\| \rightarrow \|y\| = 0.$$

Ce qui conclut la preuve. □

Théorème 1.4.2. Chaque espace normé de dimension finie est complet.

Démonstration. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension n , et de base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Soit (x_m) une suite de Cauchy dans X . Notons :

$$x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(m)} e_n.$$

Comme (x_m) est de Cauchy, à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que :

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Par le lemme précédent, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\varepsilon > \|x_n - x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n (\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}) e_j \right\| \geq c \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(n)} - \alpha_j^{(m)}| \quad \forall n, m \geq N.$$

Ainsi pour tout j fixé, la suite $(\alpha_j^{(n)})_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et donc converge. Notons la limite α_j et considérons le vecteur

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

On a bien :

$$\|x_m - x\| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j| \|e_j\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

□

Corollaire 1.4.3. Chaque sous-espace Y de dimension finie dans un espace normé X est fermé dans X .

Théorème 1.4.4. Sur un espace vectoriel X de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ deux normes sur X de dimension n et de base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Par le lemme utile, on a d'une part :

$$\|x\|_a \geq c \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|x\|_b \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|e_j\|_b \leq \max_i \|e_i\|_b \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Ainsi en posant $\alpha = \frac{c}{\max_i \|e_i\|_b}$, on déduit :

$$\alpha \|x\|_b \leq \|x\|_a.$$

En échangeant les rôles de a et b , on déduit l'autre inégalité.

□

1.5 Compacité en dimension finie

Définition 1.5.1 (Rappels de topologie). Soit (X, d) un espace métrique et soit $K \subset X$. On dit que K est un compact de X s'il vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. Si $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, avec ω_i ouvert pour tout i , il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{j \in J} \omega_j$. De tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. Si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans K , il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ et $x \in K$ tels que
$$x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

Proposition 1.5.2. Soit X un espace normé et soit $K \subset X$.

- (1) Si K est compact, alors K est fermé et borné.
- (2) Si X est de dimension finie, alors la réciproque de (1) est vraie.

Démonstration. Exercices □

Remarque 1.5.3. Par la proposition précédente, on a que si X est de dimension finie, alors la boule unité fermée $\overline{B(0, 1)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ est compacte puisqu'elle est fermée et bornée. On va démontrer la réciproque.

Théorème 1.5.4. (Riesz) Soit X un espace normé. Si $\overline{B(0, 1)}$ est compacte, alors X est de dimension finie.

Lemme 1.5.5 (Lemme de Riesz). Soit Y et Z deux sous-espaces d'un espace normé X tels que Y soit fermé et est un sous-ensemble propre de Z . Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, il existe $z \in Z$ tel que :

1. $\|z\| = 1$;
2. $\|z - y\| \geq \theta \quad \forall y \in Y$.

Démonstration. Soit $v \in Z \setminus Y$ et posons $a := \inf_{y \in Y} \|v - y\| > 0$ puisque Y est fermé. Pour $\theta \in (0, 1)$, on peut trouver $y_0 \in Y$ tel que :

$$a \leq \|v - y_0\| \leq \frac{a}{\theta}.$$

On pose alors $z = \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|}$ de sorte à avoir $\|z\| = 1$. De plus pour tout $y \in Y$:

$$\|z - y\| = \left\| \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|v - y_0\|} \|v - y_0 - \|v - y_0\| y\| \geq \frac{1}{\|v - y_0\|} a \geq \frac{a}{a/\theta} = \theta.$$

□

Démonstration du Théorème de Riesz. On contrapose. On suppose donc que X n'est pas de dimension finie et on montre que $B = \overline{B(0, 1)}$ n'est pas compacte. Pour cela on construit une suite dans B n'ayant pas de sous-suite convergente. Soit $x_1 \in X$ de norme 1. On regarde le $Y_1 = \text{Span}(x_1)$ dans X qui est un sous-espace propre fermé de dimension 1. Par le lemme précédent, il existe $x_2 \in X$ de norme 1 et tel que $\|x_2 - x_1\| \geq 1/2$.

Ainsi les éléments x_1 et x_2 engendrent un sous-espace Y_2 de dimension 2 propre de X et fermé. On peut donc ré-appliquer le lemme précédent, pour trouver un vecteur x_3 de norme 1 et tel que $\|x_3 - y\| \geq 1/2$ pour tout $y \in Y_2$. En ré-itérant l'argument de proche en proche (cela ne se termine pas puisque X est de dimension infinie), on construit une suite $(x_n) \subset B$ telle que pour tous $m > n \geq 1$:

$$\|x_n - x_m\| \geq 1/2.$$

Ainsi cette suite ne possède pas de sous-suite convergente.

□

Chapitre 2

Opérateurs

On s'intéresse dans ce chapitre aux applications linéaires entre espaces vectoriels normés.

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1.1. Une application linéaire $T: X \rightarrow Y$ entre deux espaces vectoriels est appelée un opérateur. On notera $Tx = T(x)$.

Définition 2.1.2. 1. On notera $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs entre X et Y .
2. Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors avec les opérations suivantes :

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x \quad (\alpha T)x = \alpha(Tx)$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace vectoriel.

3. On notera l'image d'un opérateur T :

$$\mathcal{R}(T) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ t.q. } Tx = y\}$$

$\mathcal{R}(T)$ est un sous-espace vectoriel de Y .

4. On notera le noyau d'un opérateur T :

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

$\mathcal{N}(T)$ est un sous-espace vectoriel de X .

Exemples 2.1.3. 1. L'opérateur identité est défini sur X par :

$$I: X \rightarrow X, x \mapsto Ix = x \quad \forall x \in X.$$

2. L'opérateur nul

$$O: X \rightarrow Y, x \mapsto Ox = 0 \quad \forall x \in X.$$

3. Soit $X = \mathcal{P}[a, b]$ l'espace des polynômes sur l'intervalle $[a, b]$. On peut alors prendre l'opérateur de dérivation :

$$Tp(t) = p'(t), \quad t \in [a, b].$$

4. Soit $X = C[a, b]$. On peut alors considérer l'opérateur de multiplication par t :

$$Tf(t) = tf(t).$$

5. On peut également regarder l'opérateur d'intégration sur $C[a, b]$:

$$Tf(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

2.2 Opérateurs et continuité

2.2.1 Opérateurs bornés

Définition 2.2.1. Soient X, Y deux espaces normés et soit $T: X \rightarrow Y$ un opérateur. On dit que T est borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X.$$

On définit alors dans ce cas la norme de l'opérateur T comme :

$$\|T\| := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

On notera $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés entre X et Y .

Proposition 2.2.2. Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Alors :

1. $\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|$;
2. $\mathcal{B}(X, Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(X, Y)$ et $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, Y)$.

Démonstration. 1. On a :

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| \neq 0} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

2. On ne démontre que l'inégalité triangulaire, le reste est évident. On regarde :

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \\ &\leq \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|T_1x\| + \|T_2x\| \\ &\leq \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|T_2x\| \\ &= \|T_1\| + \|T_2\|. \end{aligned}$$

□

Exemples 2.2.3. Avec les notations et numérotations des exemples précédents :

1. $\|I\| = 1$;
2. $\|O\| = 0$;

3. On considère $p_n(t) = t^n$ pour tout $n \geq 1$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On a

$$\|p_n\|_\infty = 1$$

pour tout n . Mais

$$\|Tp_n\|_\infty = \|nt^{n-1}\|_\infty = n.$$

D'où $\sup_{\|p\|_\infty=1} \|Tp\|_\infty = \infty$, i.e. T n'est pas borné.

4. On a

$$\|Tf\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |tf(t)| \leq \max\{|a|, |b|\} \|f\|_\infty$$

Donc T est borné.

5. L'opérateur d'intégration sur $C[a, b]$ est borné, exercice.

Théorème 2.2.4. Si X est de dimension finie, alors $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de X . On écrit $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Alors :

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j Te_j \right\| \leq \max_i \|Te_i\| \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Par le lemme utile, en posant $K = \max_i \|Te_i\|$, on obtient :

$$\|Tx\| \leq \frac{K}{c} \|x\|.$$

□

2.2.2 Opérateurs continus

Théorème 2.2.5. Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. T est borné ;
2. T est continu ;
3. T est continu en un point $x_0 \in X$.

Démonstration. On commence par montrer $(1) \Rightarrow (2)$. Le résultat est évident si $T = 0$. Supposons donc que $T \neq 0$. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. On pose alors $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. On a pour tout $x \in X$ tel que $\|x - x_0\| < \delta$:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Ainsi comme x_0 est arbitraire, T est continu.

$(2) \Rightarrow (3)$ est évident. Il suffit donc de démontrer $(3) \Rightarrow (1)$. On suppose donc que T est continu en x_0 . On regarde donc $\varepsilon = 1$ et on considère δ de sorte que :

$$\forall x \in X : \|x_0 - x\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < 1.$$

Pour $x \in X$ $x \neq 0$, on prend

$$x_\delta = x_0 + \frac{\delta}{\|x\|} x,$$

de sorte à avoir $\|x_\delta - x_0\| = \delta$. Ainsi :

$$\|Tx\| = \|T(\frac{\|x\|}{\delta}(x_\delta - x_0))\| = \frac{\|x\|}{\delta}\|Tx_\delta - Tx_0\| < \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

□

Corollaire 2.2.6. Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Alors

1. Si $x_n \rightarrow x$, on a $Tx_n \rightarrow Tx$.
2. $\mathcal{N}(T)$ est fermé.

Proposition 2.2.7. Si X est de dimension finie, et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors il existe $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$ et $\|Tx_0\| = \|T\|$.

Démonstration. La sphère unité $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ est fermée et bornée et donc compacte car X est de dimension finie. De plus T est continu. Ainsi la fonction :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par $f(x) = \|Tx\|$ est continue. Par conséquent f atteint son maximum sur S . □

Remarque 2.2.8. Le résultat est faux en dimension infinie. En effet, il suffit de considérer $X = Y = l^1$ et l'opérateur :

$$Tx = ((1 - \frac{1}{i})x_i)_{i \geq 1}.$$

On a $\|T\| \leq 1$ puisque $|(Tx)_i| \leq |x_i|$ pour tout i . En fait $\|T\| = 1$. Mais pour tout $x \in S$, on a qu'il existe $i_0 \geq 1$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. Ainsi $|(1 - 1/i_0)x_{i_0}| < |x_{i_0}|$ et donc $\|Tx\|_1 < \|x\|_1$.

Pour voir $\|T\| = 1$, il suffit de considérer la suite $(e^{(n)})_{n \geq 1}$, où $e^{(n)} = (e_i^{(n)})_{i \geq 1}$ avec $e_i^{(n)} = 1$ si $i = n$ et 0 sinon.

2.3 Espace des opérateurs et complétude

Question 2.3.1. Quand est-ce que $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet ?

Théorème 2.3.2. Si Y est complet, alors $\mathcal{B}(X, Y)$ est complet.

Démonstration. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(X, Y)$. Pour $x \neq 0$, on a que $(T_n x)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans Y :

Soit $\varepsilon > 0$, alors par hypothèse il existe pour $\varepsilon' = \varepsilon/\|x\|$ un $N(\varepsilon')$ tel que :

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon' \quad \forall n, m \geq N.$$

Ainsi

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Comme Y est complet, on pose $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ pour tout $x \neq 0$ et $T0 = 0$ puisque $T_n 0 = 0$ pour tout n .

Montrons à présent que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$:

La linéarité de T est évidente. De plus, on a en faisant tendre $m \rightarrow \infty$:

$$\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall n \geq N \forall x.$$

Ainsi on déduit que $T - T_{N(1)} \in \mathcal{B}(X, Y)$ et donc :

$$T = T - T_{N(1)} + T_{N(1)} \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Finalement $T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T$ puisque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

□

Chapitre 3

Espaces de Banach

On donne dans ce chapitre quelques propriétés remarquables des espaces de Banach.

3.1 Complétion d'un espace métrique

Question 3.1.1. Supposons à présent qu'on soit dans le cas où l'on dispose d'un espace normé X . Peut-on plonger notre espace X dans un espace de Banach ? Autrement dit peut-on compléter notre espace X pour qu'il devienne un espace de Banach ?

Théorème 3.1.2 (Complétion). Soit X un espace normé. Alors il existe un espace de Banach $\hat{X}$ et une isométrie $\alpha: X \rightarrow \hat{X}$ de sorte que l'image de X soit dense dans $\hat{X}$. De plus, $\hat{X}$ est unique à isométries près. On dit alors que $\hat{X}$ est la complétion de X .

Pour démontrer le théorème 3.1.2, on utilise le résultat suivant :

Théorème 3.1.3 (Fréchet, 1900). Soit (X, d) un espace métrique et soit $x_0 \in X$. Pour $x \in X$, on pose la fonction

$$f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$$

Alors $f_x \in C_b(X)$ et

$$\varphi: X \rightarrow C_b(X)$$

définie par $\varphi(x) = f_x$ est un plongement isométrique.

Démonstration. 1. $|f_x(y)| \leq d(x_0, x)$ par inégalité triangulaire. D'où $f_x \in C_b(X)$.

2.

$$\begin{aligned} \|f_x - f_{x'}\|_\infty &= \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(x', y)| \\ &\leq d(x', x). \end{aligned}$$

Ainsi en prenant $y = x$, le supremum est atteint et donc φ est une isométrie. □

Démonstration. théorème 3.1.2

Par le résultat précédent, il suffit de prendre $\overline{\varphi(X)} \subset C_b(X)$. En effet, en utilisant le précédent, on a un sous-espace fermé dans un espace de Banach ; il est donc complet. □

3.2 Théorème de Baire

3.2.1 Énoncé et preuve

Le théorème suivant est vrai dans les espaces complets, ce qui est donc le cas des espaces de Banach.

Théorème 3.2.1. (Baire) Soit X un espace métrique complet et (U_n) une suite d'ouverts denses. Alors $\bigcap_n U_n$ est dense également.

On en déduit aisément les deux versions alternatives suivantes par passage au complémentaire et par contraposée.

Corollaire 3.2.2. Si X est complet, une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est vide.

Corollaire 3.2.3. Soit X un espace complet. Si $X = \bigcup F_n$, avec les F_n fermés, alors il existe n tel que $F_n^\circ \neq \emptyset$.

Démonstration du théorème de Baire. Soit ω un ouvert non vide. On construit une suite de boules $B(x_n, \varepsilon_n)$ telles que

- $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset \omega \cap U_0$,
- $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap U_n$,
- $\varepsilon \rightarrow 0$.

Le théorème des fermés emboîtés assure alors que $\bigcap \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} = \{l\}$, ce qui montre que $\omega \cap \bigcap U_n \neq \emptyset$. $\square$

3.2.2 Quelques applications

Théorème . (Banach-Steinhaus) Soit E, F des espaces vectoriels normés avec E de Banach. On considère une famille d'opérateurs continus $(T_i : E \rightarrow F)$. Alors on a équivalence entre

- (i) pour tout x la famille $(\|T_i x\|)_i$ est bornée,
- (ii) la famille des $\|T_i\|$ est bornée.

Démonstration. On a évidemment que $(ii) \Rightarrow (i)$. Réciproquement, considérons $F_n = \{x \in E : \sup \|T_i x\| \leq n\} = \bigcap_i \{\|T_i x\| \leq n\}$, qui est une famille de fermés. Par hypothèse, leur union est égale à E . Le théorème de Baire assure donc que l'un d'entre eux est d'intérieur non vide, et contient donc une boule, ce qui permet de borner les normes d'opérateurs. $\square$

Proposition 3.2.4. Si E est un espace de Banach de dimension infinie, alors sa dimension est indénombrable.

Démonstration. Si sa dimension est dénombrable, on peut écrire $E = \bigcup \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$, et il est donc une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui est impossible par le théorème de Baire. $\square$

3.3 Théorème de l'application ouverte

On considère maintenant les applications linéaires entre espaces de Banach. On a les trois théorèmes suivants, qui sont équivalents.

Théorème 3.3.1. (Application ouverte, Banach-Schauder) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue entre espaces de Banach. Si f est surjective, alors f est ouverte.

Théorème 3.3.2. (Graphe fermé) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces de Banach. Si le graphe de f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

Théorème 3.3.3. (Isomorphisme de Banach) Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue entre deux espaces de Banach. Si f est bijective, alors f^{-1} est également continue.

Démonstration des équivalences. • Supposons le théorème de l'isomorphisme et montrons le théorème du graphe fermé. Le graphe de f est un sous-espace fermé $G \subset E \times F$, il est donc complet. La projection sur la première coordonnée est bijective, donc son inverse p_1^{-1} est continu. L'application $f = p_2 \circ p_1^{-1}$ est donc également continue.

- Réciproquement, supposons le théorème de graphe fermé. Soit f une application linéaire continue et bijective. Le graphe de f est également le graphe de f^{-1} . Comme ce dernier est fermé, f^{-1} est également continue.
- Supposons le théorème de l'application ouverte. Soit maintenant f linéaire, continue et bijective. Elle est donc ouverte. Ainsi, $f(B_E(0, 1)) \supset B_F(0, \varepsilon)$. Autrement dit, $f^{-1}(B_F(0, 1)) \subset B_E(0, \frac{1}{\varepsilon})$, donc l'inverse est également continu.
- Enfin, supposons le théorème de l'isomorphisme. Soit maintenant $f : E \rightarrow F$ linéaire, continue et surjective. On peut factoriser f de la manière suivante :

$$E \rightarrow E/\ker f \rightarrow F.$$

La projection est ouverte, et la seconde flèche est un isomorphisme continu, donc un isomorphisme de Banach qui est donc ouvert.

□

On montre donc maintenant le premier théorème.

Démonstration du théorème de Banach-Schauder. Il suffit de trouver $\delta > 0$ tel que $B(0, \delta) \subset f(B_E(0, 1))$. On pose $F_r = \overline{f(B_E(0, r))}$. Par surjectivité, on peut écrire

$$F = \bigcup F_n.$$

Le théorème de Baire assure alors qu'il existe l'un des fermés d'intérieur non vide. Quitte à multiplier par un scalaire, on peut supposer que

$$B_F(y, r_0) \subset F_{1/2} = \overline{f(B_E(0, \frac{1}{2}))}.$$

Par symétrie, $B_F(-y, r_0)$ est aussi contenue dedans. Comme un élément z de $B_F(0, r_0)$ s'écrit $(z + y) + (-y)$, on en déduit que

$$B_F(0, r_0) \subset F_{1/2} + F_{1/2} \subset F_1.$$

Ainsi, chaque F_r est un voisinage de 0. Il s'agit maintenant de faire sauter la barre. Si $y \in F_r$, alors il existe $x \in B_E(0, r)$ tel que $y - f(x) \in F_{r/2}$. Par récurrence, on construit donc $x_n \in B_E(0, \frac{1}{2^n})$ tel que

$$y - f(x_1 + \cdots + x_n) \in F_{1/2^n}.$$

La série des x_n est absolument convergente, donc convergente vers une limite $x \in \overline{B_E(0, 2)}$. On a alors

$$B_F(0, r_0) \subset F_1 \subset f(\overline{B_E(0, 2)}) \subset f(B_E(0, 3)),$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 3.3.4. Si E est un Banach et $\|x\|' \leq c\|x\|$ une autre norme qui en fasse également un Banach, alors les deux normes sont équivalentes.

Chapitre 4

Dualité

topologie faible, faible-* Banach-Alaoglu-Bourbaki

4.1 Espace Dual

Définition 4.1.1. Une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ est un opérateur où le domaine X est un espace vectoriel et l'image est le corps de scalaires de X .

Exemples 4.1.2. Soit $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. On considère l'intégration :

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto f(g) = \int_0^1 g(x) dx. \end{aligned}$$

2. Soit $t_0 \in [0, 1]$. On considère l'évaluation :

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto f(g) = g(t_0). \end{aligned}$$

En guise de dernier exemple on regarde sur l^2 la fonctionnelle linéaire suivante :

$$f(x) = \sum_{i \geq 1} a_i b_i, \quad x = (a_i)_{i \geq 1} \in l^2,$$

et $b = (b_i)_{i \geq 1} \in l^2$ est un vecteur fixé. C'est un opérateur de multiplication.

Remarque 4.1.3. En guise d'exercice, on peut montrer que les trois fonctionnelles ci-dessus sont continues.

Définition 4.1.4. Soit X un espace normé. Le dual de X , noté X' ou X^* dans la littérature, est l'espace normé $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Comme on considère uniquement comme corps de scalaires $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, on déduit directement que X' est un espace de Banach.

En analyse fonctionnelle, on étudie souvent les duals des espaces parallèlement à l'étude des espaces eux-mêmes ; ceci permet de mieux comprendre les espaces. Le but de cette section est donc de donner quelques clefs, à travers quelques exemples, pour mieux comprendre les espaces duals.

Définition 4.1.5. Soient X, Y deux espaces normés. On rappelle que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est un plongement isométrique si :

$$\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Si c'est le cas, alors T est injectif et borné.

Si de plus T est surjectif, on dit alors que T est un isomorphisme d'espaces normés et dans ce cas X est isomorphe à Y , on note $X \cong Y$. Abstraitement X et Y sont le même espace.

Exemple 4.1.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le dual de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. On considère $\mathbb{R}^n$ avec la norme $\|\cdot\|_2$; on rappelle que toutes les normes sont équivalentes. Soit f une fonctionnelle dans $(\mathbb{R}^n)'$, automatiquement bornée. On considère une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et pour

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in \mathbb{R}^n,$$

on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(e_k).$$

On pose $a_k = f(e_k)$ et donc f est entièrement déterminée par une matrice $a_f = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, on considère alors l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}^n)' &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto \varphi(f) = a_f. \end{aligned}$$

On a bien une application linéaire et bijective ; vu en cours d'algèbre linéaire. De plus, φ préserve la norme :

D'une part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|f(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}.$$

Ainsi, on déduit :

$$\|f\| \leq \|a_f\|_2.$$

D'autre part, en regardant le vecteur a_f , on a :

$$f(a_f) = \|a_f\|_2^2$$

et donc $\|a_f\|_2 \leq \|f\|$.

On peut aussi regarder un exemple en dimension infinie. Pour cela, on généralise la notion de base :

Définition 4.1.7. Soit X un espace normé et soit $\{e_k\}_{k \geq 1}$ une suite de vecteurs dans X . On dit que $\{e_k\}_{k \geq 1}$ est une base de Schauder de X si :

$$\forall x \in X \exists ! (\alpha_k)_{k \geq 1} \subset \mathbb{K} : \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exemple 4.1.8. Soit $p \geq 1$. Alors sur l^p , la suite définie par $e^{(n)} = (e_i^{(n)})_{i \geq 1}$, où :

$$e_i^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une base de Schauder pour l^p .

Proposition 4.1.9. Soit $p \in (1, \infty)$. Alors $(l^p)' \cong l^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration. Soit $f \in (l^p)'$ et soit $x \in l^p$. On note

$$x^{(n)} = \sum_{j=1}^n x_j e^{(j)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$f(x^{(n)}) = \sum_{j=1}^n x_j a_j,$$

où $a_i = f(e^{(i)})$. Ainsi on a $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j a_j$. Montrons que $(a_i)_{i \geq 1} \in l^q$. Pour cela, on définit une suite $b^{(n)} = (b_i^{(n)})_{i \geq 1}$ par :

$$b_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{|a_i|^q}{a_i}, & \text{si } i \leq n, a_i \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

De sorte à obtenir :

$$f(b^{(n)}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n |a_j|^q,$$

et

$$\|b^{(n)}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |b_i^{(n)}|^p = \sum_{i=1}^n |a_i|^{p(q-1)} = \sum_{i=1}^n |a_i|^q.$$

Or

$$f(b^{(n)}) \leq \|f\| \|b^{(n)}\|_p$$

et donc

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|, \quad \forall n \geq 1.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $a = (a_i)_{i \geq 1}$ est dans l^q . On considère alors :

$$\begin{aligned} T : (l^p)' &\rightarrow l^q \\ f &\mapsto Tf = a = a_f. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que T est linéaire et on vient de voir que $\|Tf\|_q \leq \|f\|$. Montrons que T est bijectif. Soit $a \in l^q$. On considère alors la fonctionnelle définie par :

$$g_a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j a_j, \quad \forall x \in l^p.$$

Par l'inégalité de Hölder la série est absolument convergente :

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j a_j \right| \leq \|x\|_p \|a\|_q.$$

Ainsi $g_a \in (l^p)'$.

D'où

$$\begin{aligned} S : l^q &\rightarrow (l^p)' \\ a &\mapsto Sa = g_a. \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire avec $\|Sa\| \leq \|a\|$. De $TS = I_{l^q}$ et $ST = I_{(l^p)'}$. Finalement on a aussi :

$$\|f\| = \|STf\| \leq \|Tf\|,$$

ce qui achève la preuve. □

On termine par énoncer la proposition suivante qui sera démontrée en exercice.

Proposition 4.1.10. $(l^1)' \cong l^\infty$.

4.2 Théorème de Hahn-Banach

Question 4.2.1. Soit X un espace normé, a-t-on $X' \neq \{0\}$?

Réponse : On a besoin d'un théorème général.

Théorème 4.2.2 (Hahn-Banach, cas réel). Soient E un $\mathbb{R}$ -ev et F un sous-espace, $p : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et f une forme linéaire définie sur F telle que $f \leq p$. Alors il existe un prolongement $\tilde{f}$ de f à E tel que $\tilde{f} \leq p$.

La preuve utilise le lemme de Zorn, qui est un résultat de théorie des ensembles équivalent à l'axiome du choix.

Lemme 4.2.3 (Lemme de Zorn). Tout ensemble ordonné inductif a (au moins) un élément maximal.

Démonstration du théorème 4.2.2. Soit $x \notin F$. On montre d'abord qu'il est possible d'étendre f à $F \oplus \mathbb{R}x$. Cela se fait en choisissant $\alpha = f(x)$. Il s'agit donc de le choisir tel que la majoration par p soit toujours satisfaite. Il suffit pour cela que pour tout $y \in F$ et $t > 0$ on ait

$$-f(y) - \frac{p(-ty - tx)}{t} \leq \alpha \leq \frac{p(ty + tx)}{t} - f(y).$$

Nous allons pour cela montrer que le sup des termes de gauches pour tout choix de t et y est inférieur à l'inf des termes de droite sur le même ensemble. On remarque que

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} (y_2 - y_1) = \frac{t_2}{t_1 + t_2} (-t_1 y_1 - t_1 x) + \frac{t_1}{t_1 + t_2} (t_2 y_2 + t_2 x),$$

ce qui donne en utilisant la convexité de p :

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} f(y_2 - y_1) \leq p\left(\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} (y_2 - y_1)\right) \leq \frac{t_2}{t_1 + t_2} p(-t_1 y_1 - t_1 x) + \frac{t_1}{t_1 + t_2} p(t_2 y_2 + t_2 x),$$

ce qui donne

$$-f(y_1) - \frac{p(-t_1 y_1 - t_1 x)}{t_1} \leq \frac{p(t_2 y_2 + t_2 x)}{t_2} - f(y_2).$$

Il est donc possible d'étendre à $F \oplus \mathbb{R}x$.

Dans le cas de la dimension finie, le résultat découle par récurrence. Pour la dimension infinie, on peut choisir une extension maximale par le lemme de Zorn. Si cette dernière n'était pas définie partout, il serait possible de l'étendre par la construction ci-dessus, contredisant la maximalité, ce qui assure que le prolongement est alors défini partout. $\square$

Remarque 4.2.4. Il est possible d'énoncer une version complexe de Hahn-Banach.

Théorème 4.2.5 (Hahn-Banach, cas d'un espace normé). Soient X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$, Y sous-espace de X , $f \in Y'$. Alors il existe $\tilde{f} \in X'$ telle que

1. $\tilde{f}$ est un prolongement de f ;
2. $\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}$.

Démonstration. Il suffit de prendre $p(x) = \|f\| \|x\|$ et d'appliquer Hahn-Banach. On a de plus

$$\|\tilde{f}\|_{X'} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in Y \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{Y'},$$

donc $\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}$. $\square$

Corollaire 4.2.6. Soient X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Il existe $f_0 \in X'$ telle que

- $\|f_0\| = 1$;
- $f_0(x_0) = \|x_0\|$.

Démonstration. On définit la forme linéaire g_0 par

- $D(g_0) := \mathbb{K}x_0$;

— $g_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

Alors $|g_0(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\|$, donc $\|g_0\|_{(\mathbb{K}x_0)'} = 1$ et $g_0(x_0) = \|x_0\|$. D'après le théorème de Hahn-Banach (cas d'un EVN), il existe un prolongement linéaire f_0 de même norme. f_0 vérifie les conditions demandées. $\square$

Corollaire 4.2.7. Soient X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ et $x_0 \in X$. Alors

$$\|x_0\| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}.$$

En particulier,

$$[\forall f \in X', f(x_0) = 0] \implies x_0 = 0.$$

Démonstration. On pose

$$s := \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}.$$

Si $x_0 = 0$, $s = 0 = \|x_0\|$. Supposons $x_0 \neq 0$. Alors, pour tout $f \in X' \setminus \{0\}$,

$$|f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\|,$$

donc

$$\frac{|f(x_0)|}{\|f\|} \leq \|x_0\|.$$

Ainsi $s \leq \|x_0\|$.

On choisit f_0 comme dans le corollaire précédent. Alors $f_0(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f_0\| = 1$, donc

$$\frac{|f_0(x_0)|}{\|f_0\|} = \|x_0\|,$$

donc $s \geq \|x_0\|$. $\square$

Corollaire 4.2.8. Soit C un convexe de E et $x \notin C$. Alors il existe une forme linéaire non nulle l sur E et un réel a tels que $l(x) = a$ et $l|_C \leq a$. Si E est un espace vectoriel normé et si C est d'intérieur non-vidé, la forme linéaire l est continue. Si E est un espace vectoriel normé et si C est fermé, on peut trouver l continue et $b > a$ tel que $l(x) = b$ et $l|_C \leq a$.

Cette version est appelée *Hahn-Banach géométrique*. Il faut visualiser que l'hyperplan d'équation $l = a$ sépare C et x .

Démonstration. On peut supposer que $0 \in C$. Il suffit alors d'appliquer Hahn-Banach à la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$ et la fonction p qui vaut 1 sur C et ∞ ailleurs. Si C est d'intérieur non vide, la majoration $f|_C \leq 1$ implique la continuité de f . Si C est fermé, il suffit de remplacer C par $C + B(0, r)$ où $r = \frac{1}{2}d(x, C)$. $\square$

Corollaire 4.2.9. L'injection $\ell^1 \hookrightarrow (\ell^\infty)'$ n'est pas surjective.

Démonstration. On définit la forme linéaire limite sur l'espace des suites bornées convergentes et on l'étend à tout ℓ^∞ en une forme linéaire L . Cette forme linéaire n'est pas dans l'image de ℓ^1 . En effet, si v^m est la suite qui vaut 0 puis 1 à partir du rang m , alors pour tout élément u de ℓ^1 , $\langle u, v^m \rangle = \sum_{n=m}^\infty u_n \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$. Comme $L(v^m) = 1$, L n'est pas de la forme $\langle u, - \rangle$. $\square$

4.3 Topologie faibles

Soit E un espace de Banach. Il est muni de la topologie de la norme appelée topologie forte. Grâce à son dual E' , il est possible de considérer des topologies différentes.

Définition 4.3.1. ◦ La topologie faible sur E est la topologie engendrée par les $f \in E'$.
 ◦ La topologie faible-* est la topologie engendrée par les applications $\text{ev}_x : f \mapsto f(x)$.

Remarque 4.3.2. En particulier, une suite converge faiblement si elle converge simplement.

Proposition 4.3.3. ◦ Une suite qui converge fortement converge faiblement.
 ◦ Une suite (x_n) qui converge faiblement est bornée et la limite vérifie $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

Démonstration. On utilise Banach-Steinhaus pour les évaluations en x_n . La famille est ponctuellement bornée, donc bornée. Pour le second point, il faut utiliser Hahn-Banach. $\square$

On a vu que la boule unité d'un espace de Banach n'est pas compact, sauf si l'espace est de dimension finie. Les topologies faibles étant moins fines, il est possible de l'espérer pour cette dernière, ce qui est le cas.

Théorème 4.3.4. (Banach-Alaoglu-Bourbaki) Soit E un Banach. La boule unité de E' est compacte pour la topologie faible-*.

Démonstration. La boule unité est un sous-espace de

$$\prod_{x \in E} [-\|x\|; \|x\|] \subset \mathbb{R}^E,$$

qui est compact par le théorème de Tychonoff. De plus, la boule unité est donnée par

$$B_{E'} = \{f : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)\},$$

ce qui en fait un fermé. Comme la topologie faible-* est la topologie de la convergence simple, donc la topologie produit, on en déduit qu'elle est bien compacte. $\square$

Ce théorème peut être utile car si l'on cherche une limite forte pour une suite, on peut d'abord commencer par en chercher une limite faible.

4.4 Théorème de Représentation de Riesz-Markov

Le théorème de représentation de Riesz fournit une manière d'obtenir des mesures positives à partir de fonctionnelles positives sur l'espace des fonctions continues à support compact. Afin d'énoncer proprement ce théorème, il nous faut faire une brève digression sur un domaine très important; la théorie de la mesure. Nous donnerons ici que les rudiments de cette théorie.

4.4.1 Rappels de théorie de la mesure

Définition 4.4.1. Soit Ω un ensemble. On appelle tribu ou σ -algèbre un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire;
3. $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Exemple 4.4.2. 1. La tribu grossière $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$;
2. la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$, la famille des parties de Ω .
3. Si $\Omega = \{a, b, c, d\}$, alors $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$ est une tribu.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. La tribu engendrée par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, i.e.

1. $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu;
2. $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$;
3. Si $\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$, alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Cette tribu existe toujours puisqu'on peut poser :

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{T}} \mathcal{A}, \quad \mathcal{T} = \{\text{tribus contenant } \mathcal{C}\}.$$

Exemple 4.4.3. Soit X un espace topologique. Alors on peut considérer la tribu borélienne, c'est-à-dire la tribu engendrée par la topologie.

Définition 4.4.4. Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé un espace mesurable.

Question 4.4.5. D'où vient l'intérêt ou la motivation à définir de tels espaces ?

On donne ici quelques éléments de réponse. H. Lebesgue s'intéressait à élaborer une théorie de l'intégration plus adéquate que celle de Riemann qui s'est avérée insatisfaisante pour plusieurs raisons ; problème de définition sur les intégrales impropres, difficulté d'établir des théorèmes de convergence. Il avait besoin de définir une application $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}_+$ afin de généraliser de la notion géométrique intuitive d'aire d'un ensemble, de mesurer la taille d'un ensemble, satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$, i.e. l'aire de rien est nul.
2. $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, i.e. les aires s'ajoutent.
3. les aires sont invariantes par translations.
4. pour tout rectangle R , $0 < \mu(R) < \infty$ et l'aire du plan est infini.

Cependant :

Théorème 4.4.6. Il n'existe pas de telle application.

Il faut donc admettre que certains sous-ensembles n'aient pas d'aire et il faut restreindre à un ensemble de parties $\mathcal{A}$ possédant une aire. D'où la notion de tribu.

On donne à présent la définition formelle de mesure.

Définition 4.4.7. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une mesure positive sur Ω est une application $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ satisfaisant :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Si $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, alors :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré.

Proposition 4.4.8 (propriétés élémentaires d'une mesure). 1. Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$;

2. Si $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$, alors :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

3. Si $(A_n) \subset \mathcal{A}$ est telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n , alors :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

4. Si $(A_n) \subset \mathcal{A}$ est telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et $\mu(A_0) < \infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Exemples 4.4.9. 1. Soit Ω un ensemble dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors l'application $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ définie par $\mu(A) = \sum_{a \in A} f(a)$ et $\mu(\emptyset) = 0$ est une mesure. Si $f = 1$, on appelle μ la mesure de comptage.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\Omega \neq \emptyset$. Soit $x \in \Omega$. On définit la mesure de Dirac $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ par

$$\mu(A) = \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- 3.

Théorème 4.4.10 (Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ telle que :

$$\lambda([a, b[)) = b - a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

On termine cette section en définissant une notion de régularité d'une mesure :

Définition 4.4.11. Soit Ω un espace localement compact soit μ une mesure borélienne sur Ω . La mesure μ est dite régulière si :

1. Pour tout borélien B , on a :

$$\mu(B) = \inf \{ \mu(V) : V \text{ ouvert tel que } B \subset V \};$$

2. Pour tout ouvert B de Ω :

$$\mu(B) = \sup \{ \mu(K) : K \text{ compact tel que } K \subset B \};$$

3. $\mu(K) < \infty$ pour tout sous-ensemble compact de Ω .

Théorie de l'intégration

Définition 4.4.12. Soit $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est mesurable si :

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \quad \forall B \in \mathcal{A}_2.$$

Si les Ω_i sont des espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes, on parle d'applications boréliennes.

Remarque 4.4.13. Les fonctions continues sont des applications boréliennes.

Définition 4.4.14. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. On dit que f est étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ tels que :

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Proposition 4.4.15. Les fonctions mesurables positives sont limites croissantes de fonctions étagées.

Définition 4.4.16 (Définition de l'Intégrale). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction étagée positive. On appelle intégrale de f la quantité :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Soit f une fonction mesurable positive. On appelle intégrale de f la quantité :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} h d\mu : h \leq f, h \text{ fonction étagée} \right\}.$$

4.4.2 Théorème de représentation de Riesz

Soit X un espace localement compact et de Hausdorff et soit ν une mesure borélienne régulière. On remarque que les fonctions continues à support compact sont intégrables, i.e. $\int_X |f| d\nu < \infty$. En effet pour $f \in C_c(X)$, on a :

$$\int_X |f(x)| d\nu(x) \leq \|f\|_\infty \nu(\text{supp}(f)) < \infty.$$

Autrement dit $C_c(X) \subset L^1(\nu)$. On peut alors définir :

$$\Lambda_\nu f = \int_X f d\nu.$$

Λ_ν est une fonctionnelle bornée sur $C_c(X)$ représentée par ν , ayant la propriété d'être positive, i.e. $\Lambda_\nu f \geq 0$ si $f \geq 0$. Le théorème suivant concerne la réciproque :

Théorème 4.4.17 (Théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani). Soit X un espace localement compact et de Hausdorff. Soit Λ une fonctionnelle positive sur $C_c(X)$. Alors il existe une tribu $\mathcal{S}$ sur X contenant les boréliens et une unique mesure positive régulière, notée μ telle que :

$$\Lambda f = \int_X f(x) d\mu(x), \quad f \in C_c(X).$$

Idée de la preuve. On commence par démontrer l'unicité. Pour cela, on admet le lemme suivant :

Lemme 4.4.18 (Lemme d'Urysohn). Soit X un espace localement compact et soit $V, K \subset X$ où V est un ouvert et K un compact tel que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in C_c(X)$ telle que :

$$\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_V.$$

Soient μ_1, μ_2 deux mesures vérifiant le théorème. Soit K un compact et soit $\varepsilon > 0$. Par régularité, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, comme il existe une fonction continue telle que $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_V$. Ainsi :

$$\mu_1(K) \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout ε , on a $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. En changeant les rôles, on déduit que $\mu_1 = \mu_2$. Construction de μ et $\mathcal{S}$:

On pose pour V un ouvert de X :

$$\mu(V) = \sup \{ \Lambda f : f \in C_c(X), f \leq \mathbf{1}_V \} \tag{4.1}$$

Puis pour toute partie E de X , on définit :

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(V) : E \subset V, V \text{ ouvert} \}.$$

On restreint alors la σ -algèbre :

On considère $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des parties E de X telles que $\mu(E) < \infty$ et

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subset E, K \text{ compact} \}.$$

Finalement, on définit :

$$\mathcal{S} = \{ E \subset X : E \cap K \in \mathcal{S}_F \text{ pour tout compact } K \}.$$

En exercice, vous démontrerez que $\mathcal{S}$ est bien une σ -algèbre et que μ est une mesure. Montrons finalement que Λ est bien représentée par μ . Quitte à remplacer f par $-f$, il suffit de démontrer l'inégalité suivante :

$$\Lambda f \leq \int_X f(x) d\mu(x), \quad f \in C_c(X).$$

Notons K le support de f . Soit $[a, b]$ un intervalle réel contenant l'image de f . Soit $\varepsilon > 0$. Prenons une suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $\max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b.$$

On pose les ensembles boréliens suivants :

$$E_k = \{ x \in X : y_{k-1} < f(x) \leq y_k \} \cap K.$$

Les (E_k) sont deux à deux disjoints et leur réunion vaut K . Par définition, on peut trouver pour tout k , un ouvert V_k tel que $E_k \subset V_k$ et $f|_{V_k} < y_k + \varepsilon$ et de plus :

$$\mu(V_k) < \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Pour tout k , il est possible de construire des fonctions $h_k < V_k$ telles que $\sum_k h_k = 1$ sur K . Cela s'appelle une partition de l'unité sur K . Ainsi $f = \sum_k h_k f$ et :

$$\mu(K) \leq \Lambda \sum_k h_k \leq \sum_k \Lambda h_k.$$

Regardons alors :

$$\begin{aligned} \Lambda f &= \Lambda \sum_k h_k f = \sum_k \Lambda h_k f \leq \sum_k (y_k + \varepsilon) \Lambda h_k = \sum_k (|a| + y_k + \varepsilon) \Lambda h_k - |a| \sum_k \Lambda h_k \\ &\leq \sum_k (|a| + y_k + \varepsilon) (\mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{n}) - |a| \mu(K) = \sum_k y_k \mu(E_k) + \varepsilon \mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_k (|a| + y_k + \varepsilon) \\ &= \sum_k (y_k - \varepsilon) \mu(E_k) + 2\varepsilon \mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_k (|a| + y_k + \varepsilon) \\ &\leq \int_X f d\mu + \varepsilon (2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Chapitre 5

Espaces de Hilbert

5.1 Produit scalaire et norme

Définition 5.1.1. Un espace préhilbertien X est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, i.e. une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que, pour tous $x, y, z \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Pour tout $x \in X$, on note

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Remarques 5.1.2.

1. Par (1)–(3), $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ et $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.
2. $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$.
3. $\|\alpha x\| = \langle \alpha x, \alpha x \rangle^{1/2} = (\alpha \overline{\alpha} \langle x, x \rangle)^{1/2} = |\alpha| \|x\|$.
4. Par (4), on a la propriété suivante : si $x \in X$ est tel que $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in X$, alors $x = 0$. Il suffit de prendre $y := x$.

Exemples

1. $\mathbb{C}^n$ avec $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. $\ell_{\mathbb{C}}^2$ avec $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$.
3. $\mathcal{C}[a, b]$ avec $\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$.
4. Si X est un espace pré-hilbertien et Y un sous-espace vectoriel, la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $Y \times Y$ est un produit scalaire.

5.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et identités remarquables

Proposition 5.2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tous $x, y \in X$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (5.1)$$

avec égalité ssi x et y sont liés.

Démonstration. Si x ou y est nul, les deux membres de (5.1) sont nuls et x et y sont liés. On peut donc supposer $\|x\|, \|y\| > 0$.

Posons

$$\tilde{x} := \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad \tilde{y} := \frac{y}{\|y\|},$$

de sorte que $\|\tilde{x}\| = \|\tilde{y}\| = 1$.

Si on montre que $|\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| \leq 1$, on a fini, car $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$.

Par la forme polaire d'un nombre complexe, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = e^{i\theta} |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle|$. Posons $u = e^{-i\theta} \tilde{x}$ et $v = \tilde{y}$. Alors

$$\langle u, v \rangle = |\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| = \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle).$$

D'autre part,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2 = 2 - 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle),$$

d'où

$$1 - \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) = \frac{1}{2} \|u - v\|^2 \geq 0.$$

On en déduit que $|\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| = \operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \leq 1$.

Si x et y sont liés, on peut écrire $y = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

$$|\langle x, y \rangle| = |\alpha| \|x\|^2 = \|x\| \|y\|.$$

Réciproquement, si on a égalité dans (5.1), $\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) = 1$, donc $1/2 \|u - v\|^2 = 0$, donc $u = v$. Ceci implique que x et y sont liés ($y = e^{i\theta} \|y\| \|x\|^{-1} x$). $\square$

Corollaire 5.2.2. L'application $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur X , appelée la norme du produit scalaire.

Démonstration. Il nous manque seulement l'inégalité triangulaire. Pour tous $x, y \in X$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad \square$$

Définition 5.2.3. Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme du produit scalaire.

Exemples

1. La norme du produit scalaire sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$ (voir ci-dessus) est la norme $\|\cdot\|_2$. C'est donc un espace de Hilbert.

2. Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert (exemple : $\mathbb{C}^n$).
3. Si H est un espace de Hilbert et Y un sous-espace fermé de H (pour la norme du produit scalaire), alors Y (muni de la restriction du produit scalaire) est un espace de Hilbert.

Contre-exemple

$C[a, b]$ n'est pas complet pour la norme $\|x\| := \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

Corollaire 5.2.4. Le produit scalaire est continu : si $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$, $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Démonstration. Exercices □

Proposition 5.2.5 (Identités de polarisation). Pour tous $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2); \\ \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle) &= \frac{1}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2). \end{aligned}$$

Démonstration. Exercices. □

Si la norme d'un EVN vient d'un produit scalaire, on peut la retrouver avec les identités de polarisation. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Proposition 5.2.6 (Identité du parallélogramme). Pour tous $x, y \in X$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration. On fait la somme des deux identités

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2; \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

□

Contre-exemples

Sur les espaces suivants, la norme **ne vient pas** d'un produit scalaire.

1. $\ell_{\mathbb{C}}^p$, avec $p \neq 2$, muni de $\|\cdot\|_p$.
2. $C[a, b]$, muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ (la norme du sup).

Il suffit de montrer que l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée (Exercices).

5.3 Orthogonalité

Définition 5.3.1. On dit que $x, y \in X$ sont **orthogonaux** (noté $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$. Si $M \subset X$, on appelle **orthogonal de M** l'ensemble

$$M^{\perp} := \{x \in X; \forall y \in M, x \perp y\}.$$

Proposition 5.3.2. Soient $M, N \subset X$.

1. $M \subset N \implies N^\perp \subset M^\perp$.
2. $M^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de X .
3. $M^\perp = \text{Vect}(M)^\perp$.
4. $M^\perp = \overline{M}^\perp$.

Démonstration.

(1) Soit $x \in N^\perp$. Pour tout $y \in M$, on a $y \in N$, donc $y \perp x$. Ainsi $x \in M^\perp$.

(2) Soient $x, y \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in M$,

$$\begin{aligned}\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0; \\ \langle \alpha x, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $x + y, \alpha x \in M^\perp$. Donc $M^\perp$ est un sev de X .

Soit (x_n) une suite dans $M^\perp$ telle que $x_n \rightarrow x \in X$. Si $y \in M$, $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle = 0$. Ainsi $x \in M^\perp$. Donc $M^\perp$ est fermé.

Pour (3)–(4), Exercices. □

Proposition 5.3.3 (Théorème de Pythagore). Soit $x, y \in X$ tels que $x \perp y$. Alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration. On applique l'identité remarquable $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$. □

Proposition 5.3.4. Soit Y un sous-espace vectoriel de X .

1. $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire les espaces vectoriels Y et $Y^\perp$ sont en somme directe.
2. $\overline{Y} \subset (Y^\perp)^\perp$.

Démonstration.

(1) Si $x \in Y \cap Y^\perp$, alors $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$.

(2) Si $y \in Y$, y est orthogonal à tous les vecteurs de $Y^\perp$, donc $y \in (Y^\perp)^\perp$. Ainsi, $Y \subset (Y^\perp)^\perp$. Comme $(Y^\perp)^\perp$ est fermé, $\overline{Y} \subset (Y^\perp)^\perp$. □

Définition 5.3.5. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x, y \in X$, le **segment** $[x, y]$ est l'ensemble $\{(1 - t)x + ty; t \in [0, 1]\}$. On dit que $C \subset X$ est **convexe** si

$$\forall x, y \in C, [x, y] \subset C.$$

Dans la suite, on a encore $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et X espace préhilbertien, sauf mention contraire.

5.4 Théorèmes de projection

Théorème 5.4.1 (Théorème de projection). Soit $C \subset X$, avec

1. $C \neq \emptyset$;
2. C convexe;
3. C complet pour la distance de la norme.

Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique $\tilde{x} \in C$ tel que

$$\|x - \tilde{x}\| = \text{dist}(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

On appelle $\tilde{x}$ le **projeté de x sur C** et on le note $P_C x$. L'application $P_C : X \rightarrow X$ est appelée **projection sur C** .

Démonstration.

Existence. On pose $d := \text{dist}(x, C)$. Il existe une suite (y_n) dans C telle que $d = \lim \|y_n - x\|$ (car C non-vide). Montrons que (y_n) est de Cauchy.

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. L'identité du parallélogramme donne

$$\|y_m - x - (y_n - x)\|^2 + \|y_m - x + y_n - x\|^2 = 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2),$$

donc

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2(\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) - 4\left\|\frac{y_m + y_n}{2} - x\right\|^2.$$

Or $(y_m + y_n)/2 \in C$ (car C convexe) donc $\|(y_m + y_n)/2 - x\| \geq d$. Ainsi

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\|y_m - x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 - 4d^2 = 2(\|y_m - x\|^2 - d^2) + 2(\|y_n - x\|^2 - d^2).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \geq 1 \text{ tel que } n \geq N(\varepsilon) \implies \|y_n - x\|^2 - d^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Si $m, n \geq N(\varepsilon)$, $\|y_m - y_n\| \leq \varepsilon$.

Ainsi, (y_n) est de Cauchy, donc (comme C complet) $\tilde{x} = \lim y_n$ existe dans C , et

$$\|\tilde{x} - x\| = \lim \|y_n - x\| = d.$$

Unicité. Soient $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in C$ tels que

$$\|x - \tilde{x}_1\| = \|x - \tilde{x}_2\| = d.$$

Le même calcul qu'avant donne

$$\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\|^2 \leq 2\|\tilde{x}_1 - x\|^2 + 2\|\tilde{x}_2 - x\|^2 - 4d^2 = 0,$$

donc $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. □

Remarque 5.4.2. Les hypothèses du théorème de projection sont vérifiées, et donc la projection est définie, dans les cas suivants :

1. $X = \mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $C \subset \mathcal{H}$ non-vide, convexe et fermé (car C est fermé dans un espace complet, donc complet).
2. X un espace pré-hilbertien, $C = Y$ un sous-espace vectoriel complet (car Y est non-vide et convexe).
3. $X = \mathcal{H}$ espace de Hilbert, $C = Y$ un sous-espace vectoriel fermé (cas particulier de (1)).
4. X espace pré-hilbertien, $C = Y$ un sous-espace vectoriel de dimension finie (cas particulier de (2) : Y est complet car de dimension finie).

Théorème 5.4.3 (Projection orthogonale). Soit Y un sous-espace vectoriel complet. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un unique $\tilde{x} \in Y$ tel que $x - \tilde{x} \in Y^\perp$ et $\tilde{x} = P_Y x$.

Démonstration.

Existence. On pose $\tilde{x} = P_Y x$.

Soit $y \in Y$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(t) := \|x - \tilde{x} + ty\|^2 = \|x - \tilde{x}\|^2 + 2t\operatorname{Re}(\langle x - \tilde{x}, y \rangle) + t^2\|y\|^2 \geq \|\tilde{x} - x\|^2 = \varphi(0).$$

Ainsi $\varphi'(0) = 2\operatorname{Re}(\langle x - \tilde{x}, y \rangle) = 0$. On a montré que $\forall y \in Y, \operatorname{Re}(\langle x - \tilde{x}, y \rangle) = 0$.

Si $y \in Y$,

$$0 = \operatorname{Re}(\langle x - \tilde{x}, iy \rangle) = \operatorname{Re}(-i\langle x - \tilde{x}, y \rangle) = \operatorname{Im}(\langle x - \tilde{x}, y \rangle)$$

d'où $\langle x - \tilde{x}, y \rangle = 0$.

Unicité. Supposons que $\tilde{\tilde{x}} \in Y$ est tel que $x - \tilde{\tilde{x}} \in Y^\perp$. Alors, par le théorème de Pythagore, pour tout $y \in Y$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - \tilde{\tilde{x}} + \tilde{\tilde{x}} - y\|^2 = \|x - \tilde{\tilde{x}}\|^2 + \|\tilde{\tilde{x}} - y\|^2 \geq \|x - \tilde{\tilde{x}}\|^2.$$

Ainsi, $\|x - \tilde{\tilde{x}}\| = \operatorname{dist}(x, Y)$, donc $\tilde{\tilde{x}} = P_Y x = \tilde{x}$. □

Corollaire 5.4.4. Soit Y un sous-espace vectoriel complet. Alors $P_Y : X \rightarrow X$ est linéaire, borné et vérifie

1. $P_Y \circ P_Y = P_Y$;
2. $\mathcal{R}(P_Y) = Y$ et $\mathcal{N}(P_Y) = Y^\perp$;
3. Si $Y \neq \{0\}$, $\|P_Y\| = 1$.

Démonstration. Exercices. □

Corollaire 5.4.5. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et Y un sous-espace vectoriel.

1. $\mathcal{H} = \overline{Y} \oplus Y^\perp$.
2. $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$.
3. Y est dense ssi $Y^\perp = \{0\}$.

Démonstration.

(1) On sait que $Y^\perp = \overline{Y}^\perp$ et que $\overline{Y}$ et $\overline{Y}^\perp$ sont en somme directe. Il suffit donc de vérifier que la somme est $\mathcal{H}$. C'est évident, car pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$x = \underbrace{P_{\overline{Y}}x}_{\in \overline{Y}} + \underbrace{x - P_{\overline{Y}}x}_{\in \overline{Y}^\perp}.$$

(2) Il suffit de montrer que $(Y^\perp)^\perp \subset \overline{Y}$. Soit $x \in (Y^\perp)^\perp$. D'après (1), $x = y + z$, avec $y \in \overline{Y}$ et $z \in \overline{Y}^\perp$. On a $\|z\|^2 = \langle z, x \rangle = 0$, donc $z = 0$. Ainsi, $x = y \in \overline{Y}$.

(3) D'après (1), $Y^\perp = \{0\} \iff \overline{Y} = \mathcal{H}$. □

Définition 5.4.6. Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille dans X . On dit que $\mathcal{F}$ est

1. **orthogonale** si $\forall i, j \in I, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0$;
2. **orthonormale** si elle est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$;
3. **totale** si $\text{Vect}(\{e_i; i \in I\})$ est dense dans X .

Proposition 5.4.7 (Famille finie). Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille dans X .

1. Si $\mathcal{F}$ est orthogonale,

$$\left\| \sum_{i=1}^N e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2.$$

2. Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, alors, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha_i|^2.$$

3. On pose $Y = \text{Vect}(\{e_i; 1 \leq i \leq N\})$. Si $\mathcal{F}$ est orthonormale, alors, pour tout $x \in X$,

$$P_Y x = \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. Exercices. □

Proposition 5.4.8 (Inégalité de Bessel). Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale dénombrable. Alors

$$\forall x \in X, \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour $N \geq 1$, on pose $Y_N := \text{Vect}(\{e_i; 1 \leq i \leq N\})$. Alors

$$\|P_{Y_N} x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Or

$$\|x\|^2 = \|x - P_{Y_N}x + P_{Y_N}x\|^2 = \|x - P_{Y_N}x\|^2 + \|P_{Y_N}x\|^2,$$

donc

$$\sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ainsi, la série est convergente et

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \quad \square$$

5.5 Bases Hilbertiennes

Définition 5.5.1. On appelle **base hilbertienne** de $\mathcal{H}$ une famille orthonormale et totale.

Exemple

Pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, on définit $e_i := \left(e_n^{(i)} \right)_{n \geq 1}$ par

$$e_n^{(i)} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = i; \\ 0 & \text{si } n \neq i. \end{cases}$$

Alors $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\ell_{\mathbb{C}}^2$.

Proposition 5.5.2. Une famille $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$ est totale ssi elle vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathcal{H}, [\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0] \implies x = 0.$$

Démonstration. Vect($\{e_i; i \in I\}$) est dense ssi Vect($\{e_i; i \in I\}^\perp = \{e_i; i \in I\}^\perp = \{0\}$). □

Définition 5.5.3 (Rappel de topologie). On dit qu'un espace métrique est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Proposition 5.5.4. $\mathcal{H}$ est séparable ssi il existe une base hilbertienne dénombrable de $\mathcal{H}$.

Démonstration. Exercices. □

Théorème 5.5.5. Chaque espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

Démonstration. Exercices. □

Lemme 5.5.6. Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale et $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Alors

1. $\sum \alpha_i e_i$ converge dans $\mathcal{H}$ ssi $\sum |\alpha_i|^2$ converge.
2. Dans ce cas, pour tout $i \geq 1$,

$$\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, e_i \right\rangle = \alpha_i.$$

Démonstration.

(1) On pose $S_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ et $\sigma_n = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$. Pour tous $m > n \geq 1$,

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |\alpha_i|^2 = \sigma_m - \sigma_n.$$

Par complétude de $\mathcal{H}$ et $\mathbb{R}$, les suites (S_n) et (σ_n) convergent ssi elles sont de Cauchy. Ainsi, (S_n) converge ssi (σ_n) converge.

(2) On pose $S = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ et on fixe $i \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq i$,

$$\langle S_n, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle e_j, e_i \rangle = \alpha_i.$$

Or $S_n \rightarrow S$ et le produit scalaire est continu, donc

$$\langle S, e_i \rangle = \alpha_i. \quad \square$$

Théorème 5.5.7 (Identité de Parseval). Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale. Alors $\mathcal{F}$ est une base hilbertienne ssi

$$\forall x \in \mathcal{H}, \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad (5.2)$$

Dans ce cas,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

et les $\langle x, e_i \rangle$ sont appelés **coefficients de Fourier** de x dans la base $\mathcal{F}$.

Démonstration. Si on a (5.2),

$$\forall x \in \mathcal{H}, [\forall i \in \mathbb{N}^*, \langle x, e_i \rangle = 0] \implies \|x\|^2 = 0 \implies x = 0.$$

$\mathcal{F}$ est donc une base hilbertienne.

Supposons que $\mathcal{F}$ est une base hilbertienne. Par l'inégalité de Bessel $\sum_{i \geq 1} |\langle x, e_i \rangle|^2$ converge. D'après le lemme précédent, la série $\sum_{i \geq 1} \langle x, e_i \rangle e_i$ converge et, si on pose

$$\tilde{x} := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i,$$

$\langle \tilde{x}, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$. Ainsi,

$$\forall i \geq 1, \langle x - \tilde{x}, e_i \rangle = 0$$

donc $x = \tilde{x}$. Alors,

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2. \quad \square$$

Donnons une conséquence immédiate du théorème précédent.

Théorème 5.5.8 (Transformée de Fourier discrète). Supposons que $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne. Alors

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\rightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2 \\ x &\mapsto (\langle x, e_i \rangle) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace de Hilbert, d'inverse

$$\begin{aligned} U : \ell_{\mathbb{C}}^2 &\rightarrow \mathcal{H} \\ (\alpha_i) &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i. \end{aligned}$$

Remarque 5.5.9. Il y a, de manière plus générale, isomorphisme entre espaces de Hilbert si et seulement si ils ont la même dimension hilbertienne.

Chapitre 6

Opérateurs entre espaces de Hilbert

6.1 Théorème de représentation de Riesz

le produit scalaire permet de définir des formes linéaires sur un espace de Hilbert H .

Proposition 6.1.1. Soit X un espace préhilbertien. Pour tout $v \in X$, l'application

$$\begin{aligned} f_v : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle x, v \rangle \end{aligned}$$

est linéaire et continue. De plus, $\|f_v\|_{X'} = \|v\|_X$.

En particulier,

1. si $v_1, v_2 \in X$ sont tels que $\forall x \in X, \langle x, v_1 \rangle = \langle x, v_2 \rangle$, alors $v_1 = v_2$;
2. pour tout $v \in X$, $\|v\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle|$.

Démonstration. Par définition du produit scalaire, f_v est linéaire. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in X, |f_v(x)| = |\langle x, v \rangle| \leq \|v\| \|x\|$$

donc f_v est bornée et $\|f_v\| \leq \|v\|$.

Si $v = 0$, $f_v = 0$ donc $\|f_v\| = 0 = \|v\|$. Si $v \neq 0$, on pose $u := v/\|v\|$ et on a $f_v(u) = \|v\|$. Ainsi, $\|f_v\| \geq \|v\|$ et donc $\|f_v\| = \|v\|$.

Montrons enfin les deux corollaires.

1. Posons $w := v_1 - v_2$. On a $f_w = 0$, donc $\|w\| = \|f_w\| = 0$, donc $v_1 = v_2$.
2. On a

$$\|v\| = \|f_v\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |f_v(x)| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle x, v \rangle|.$$

□

En fait, on peut montrer que toutes les formes linéaires sont de cette forme.

Théorème 6.1.2 (Théorème de représentation de Riesz). Soit $f \in \mathcal{H}'$. Il existe un unique $v \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}, f(x) = \langle x, v \rangle. \quad (6.1)$$

et alors $\|v\| = \|f\|$.

Remarque 6.1.3. Cela signifie que toute forme linéaire continue sur un espace de Hilbert peut être représentée par un vecteur.

Démonstration.

Existence. Si $f = 0$, on choisit $v = 0$. Supposons donc que $f \neq 0$. Alors $\mathcal{N}(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}(f) \neq \mathcal{H}$. Ainsi,

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(f) \oplus \mathcal{N}(f)^\perp$$

avec $\mathcal{N}(f)^\perp \neq \{0\}$. Fixons $z_0 \in \mathcal{N}(f)^\perp \setminus \{0\}$. Alors $f(z_0) \neq 0$ (car $z_0 \notin \mathcal{N}(f)$).

Soit $x \in \mathcal{H}$. On pose

$$y := x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0.$$

Alors

$$f(y) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z_0)} f(z_0) = 0,$$

donc $y \in \mathcal{N}(f)$. Alors

$$0 = \langle y, z_0 \rangle = \langle x, z_0 \rangle - \frac{f(x)}{f(z_0)} \|z_0\|^2,$$

donc

$$f(x) = \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \langle x, z_0 \rangle = \left\langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \right\rangle.$$

On choisit

$$v = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0.$$

Unicité. Elle découle du (1) de la proposition précédente.

Norme. D'après la proposition précédente, on a $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|v\|_{\mathcal{H}}$. □

6.2 Opérateur adjoint

Proposition 6.2.1. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaces de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall y \in \mathcal{H}_2, \langle Tx, y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*y \rangle_{\mathcal{H}_1}. \quad (6.2)$$

De plus $\|T^*\| = \|T\|$.

T^* est appelé l'**adjoint** de T .

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{H}_2$. Posons

$$\begin{aligned} f_y : \mathcal{H}_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

f_y est clairement linéaire et,

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, |f_y(x)| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|,$$

Cauchy-Schwarz

donc f_y est bornée et $\|f_y\| \leq \|T\| \|y\|$. Ainsi, $f_y \in \mathcal{H}'_1$, donc, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique $v_y \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}_1, f_y(x) = \langle x, v_y \rangle.$$

On pose $T^*y := v_y$. On a ainsi défini $T^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, qui est l'unique application vérifiant (6.2). Il reste à montrer que $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.

T^* linéaire. Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{H}_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}_1$,

$$\begin{aligned} \langle Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle &= \overline{\alpha_1} \langle Tx, y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle Tx, y_2 \rangle = \overline{\alpha_1} \langle x, T^* y_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle x, T^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha_1 T^* y_1 \rangle + \langle x, \alpha_2 T^* y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2 \rangle. \end{aligned}$$

Par unicité dans le théorème de Riesz,

$$T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2.$$

T^* bornée et $\|T^*\| = \|T\|$.

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{H}_2, \|y\| \leq 1} \|T^*y\| &= \sup_{y \in \mathcal{H}_2, \|y\| \leq 1} \sup_{x \in \mathcal{H}_1, \|x\| \leq 1} |\langle x, T^*y \rangle| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{H}_1, \|x\| \leq 1} \sup_{y \in \mathcal{H}_2, \|y\| \leq 1} |\langle Tx, y \rangle| = \sup_{x \in \mathcal{H}_1, \|x\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|. \quad \square \end{aligned}$$

Exemple

$\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{H}_2 := \mathbb{C}^m$ (avec le produit scalaire usuel), $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ a pour matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^m, \langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \bar{y} = x^T A^T \bar{y} = x^T \overline{A^T}^T \bar{y}.$$

Ainsi, $T^* : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ a pour matrice $\overline{A}^T \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (matrice transposée et conjuguée).

Proposition 6.2.2. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espaces de Hilbert, $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
3. $(T^*)^* = T$.
4. Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, $(ST)^* = T^* S^*$.
5. $\|T^* T\| = \|T\|^2$ (et donc $\|T^* T\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2 = \|T T^*\|$).

Démonstration.

Exercices □

Remarque 6.2.3. Pour simplifier, on écrit $\mathcal{B}(\mathcal{H}) := \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Définition 6.2.4. On dit que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est

1. **auto-adjoint** si $T^* = T$;
2. **unitaire** si $T^* T = T T^* = I_{\mathcal{H}}$;
3. **normal** si $T^* T = T T^*$.

Remarque 6.2.5. «Autoadjoint $\implies$ normal» et «unitaire $\implies$ normal», mais on n'a pas de réciproque.

Remarque 6.2.6. On peut faire la théorie des espaces préhilbertiens et de Hilbert réels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Les définitions et résultats que nous venons de voir restent valables (inégalité de Cauchy-Schwarz, projection, base hilbertienne, dualité de Riesz, adjoint, etc.). Il y a des simplifications, dues au fait que le produit scalaire est **symétrique** et **bilinéaire**. Si $x, y \in X$ espace pré-hilbertien réel,

1. Identité remarquable :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

2. Formule de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

3. Théorème de Pythagore :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Si $\mathcal{H}$ espace de Hilbert réel,

$$v \mapsto f_v,$$

avec $f_v(x) := \langle x, v \rangle$, est un isomorphisme d'espace vectoriel normé entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ réels,

$$T \mapsto T^*$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

6.3 Réflexivité des espaces de Hilbert

Soit X un espace normé.

Définition 6.3.1. Le dual du dual $(X')'$, noté X'' , est appelé le bidual de X .

Soit $x \in X$ fixé. On peut alors définir une fonctionnelle g_x sur X' en posant :

$$g_x(f) = f(x), \quad \forall f \in X'.$$

Lemme 6.3.2. Pour tout $x \in X$ fixé, la fonctionnelle g_x est bornée et linéaire, i.e. $g_x \in X''$. De plus $\|g_x\| = \|x\|$.

Démonstration. La linéarité est évidente. Regardons donc

$$\|g_x\| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|$$

par le corollaire 3.10. □

On peut donc définir une application canonique :

$$\begin{aligned} C : X &\rightarrow X'' \\ x &\mapsto g_x. \end{aligned}$$

Lemme 6.3.3. Cette application C est linéaire, injective et préserve la norme. C'est donc un isomorphisme entre X et $C(X)$.

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et soit $x, y \in X$. On a :

$$g_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha g_x + \beta g_y, \quad \forall f \in X'.$$

Ainsi $C(\alpha x + \beta y) = \alpha C(x) + \beta C(y)$. En particulier $g_{x-y} = g_x - g_y$ et donc $\|C(x-y)\| = \|x-y\|$ ce qui implique l'injectivité. $\square$

Définition 6.3.4. Un espace normé X est réfléxif si $C(X) = X''$

Théorème 6.3.5. Un espace normé X réfléxif est complet.

Démonstration. X'' est un espace de Banach par le théorème 0.13. Puisque C est un isomorphisme entre X et X'' , on déduit le résultat. $\square$

Exemples 6.3.6. 1. $\mathbb{R}^n$ est réfléxif puisque $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$.

2. Pour $p \in (1, \infty)$, l^p est réfléxif puisque $(l^p)' = l^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. Par contre l^1 n'est pas réfléxif.

Théorème 6.3.7. Tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est réfléxif.

Démonstration. On factorise $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}''$ par des bijections isométriques, i.e. on construit deux applications $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ et $A' : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}''$ telles que $C = A' \circ A$. On définit

$$\begin{aligned} A : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}' \\ x &\mapsto f_x, \end{aligned}$$

où $f_x(y) = \langle y, x \rangle$ est une application isométrique, anti-linéaire et surjective par le théorème de Riesz. Grâce à A , on transfère le produit scalaire sur $\mathcal{H}'$, i.e. si $f, g \in \mathcal{H}'$, alors il existe $x, y \in \mathcal{H}$ tels que $f = A(x)$, $g = A(y)$ et ainsi on pose :

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

de sorte que $\mathcal{H}'$ devienne un espace de Hilbert. On peut donc construire A' de la même manière, i.e. $A'(f)(g) = \langle g, f \rangle$, $f, g \in \mathcal{H}'$.

Si $x \in \mathcal{H}$, et $g \in \mathcal{H}'$ on a donc :

$$A' \circ A(x)(g) = \langle g, A(x) \rangle = \langle A(y), A(x) \rangle = \langle x, y \rangle = f_y(x) = A(y)(x) = g(x) = C(x)(g).$$

$\square$

Chapitre 7

Espaces L^p

Les principaux exemples d'espaces de Banach que l'on a donné jusqu'à présent sont les espaces de dimension finie, l'espace des fonctions continues bornées ainsi que les espaces de suites. On donne dans ce chapitre une famille d'espaces complets construits à partir de la théorie de la mesure.

7.1 Espace des fonctions intégrables

7.1.1 Définition et complétude

Soit A un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des fonctions intégrables $\mathcal{L}^1(A)$ est un espace vectoriel et l'application $\|f\| = \int_A |f| dx$ vérifie toutes les propriétés d'une norme sauf la séparation. On a cependant la propriété suivante :

Théorème 7.1.1. Si f est mesurable et positive sur A . L'intégrale $\int_A f dx$ est nulle si et seulement si la fonction est nulle, sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle.

De plus, l'ensemble des fonctions *nulles presque partout* forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(A)$. Il est donc possible de quotienter par cet espace pour obtenir un espace vectoriel $L^1(A)$ sur lequel

$$\|f\|_1 = \int_A |f| dx,$$

est une norme.

Remarque 7.1.2. Dans la pratique, on travaille quand même avec les fonctions, mais on identifie deux fonctions égales presque partout.

Théorème 7.1.3. L'espace vectoriel normé $L^1(A)$ est complet.

Démonstration. Dans le cas des suites, on trouvait la limite simple de la suite, puis on montrait qu'elle était bien la limite pour $\|\bullet\|_1$. C'est ici plus compliqué car on ne dispose pas de fonctions d'évaluation. On va utiliser le critère sur les séries absolument convergentes. Soit (u_n) une série de fonctions telle que $\sum \|u_n\|_1$ converge. Par le théorème d'interversion pour les fonctions positives, on a donc

$$\int_A \sum |u_n(x)| dx = \sum \int_A |u_n| dx < \infty.$$

Ainsi, la fonction $\sum |u_n(x)|$ est intégrable sur A , ce qui force la somme à être finie presque partout. On en déduit qu'il en est de même pour $\sum u_n(x)$, qui est définie presque partout, et intégrable. Il reste à montrer que cette limite est bien la limite pour la norme $\|\bullet\|_1$.

La suite de fonctions $f_n = \sum_0^n u_k$ converge simplement (presque partout) vers $\sum_0^\infty u_n$, et on a $|f_n| \leq \sum_0^\infty |u_n|$. On peut donc conclure par convergence dominée. $\square$

7.1.2 Lien entre les différents types de convergence

• La convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout. Il suffit de considérer la suite

$$f_n = \chi_{[\frac{r}{2^k}, \frac{r+1}{2^k}], \text{ où } n = 2^k + r.$$

On a cependant le théorème suivant.

Théorème 7.1.4. Si $f_n \rightarrow f$ dans L^1 , alors il existe une suite extraite qui converge presque partout.

Démonstration. On peut trouver une suite extraite telle que $\|f_{n_k} - f\|_1 < \frac{1}{2^k}$. La série des $u_k = f_{n_k} - f$ est absolument convergente. D'après le théorème de permutation, on en déduit que $\sum u_k$ converge presque partout, ce qui implique que son terme général tend vers 0. $\square$

• Réciproquement, la convergence presque partout n'implique pas la convergence L^1 . On peut prendre par exemple la suite des $\frac{1}{n}\chi_{[0;n]}$. On a par contre le théorème suivant.

Théorème 7.1.5. (convergence dominée) Si $f_n \rightarrow f$ presque partout et $|f_n| \leq g$ avec g intégrable, alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

7.1.3 Dual de $L^1(A)$

On a une injection continue

$$L^\infty(A) \rightarrow L^1(A)',$$

où $L^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions bornées presque partout. il est possible de montrer qu'il s'agit d'une isométrie surjective grâce au théorème de radon-Nikodym.

7.2 Espace des fonctions à carré intégrable

7.2.1 Définition et complétude

On considère maintenant l'espace $\mathcal{L}^2(A)$ des fonctions f telles que $\int_A |f|^2 dx < \infty$. L'inégalité

$$|f + g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2,$$

assure qu'il s'agit d'un espace vectoriel. On identifie de même les fonctions égales presque partout pour obtenir un espace $L^2(A)$.

Théorème 7.2.1. L'espace $L^2(A)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et il est muni d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_A \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Démonstration. L'intégrale donnant le produit scalaire est bien définie car

$$|\overline{f}g| \leq |f|^2 + |g|^2.$$

□

Remarque 7.2.2. On a en particulier tous les résultats des espaces préhilbertiens, comme Cauchy-Schwartz par exemple.

On a le théorème suivant, dit de *convergence dominée dans L^2* .

Théorème 7.2.3. Soit f_n une suite de fonctions dans L^2 qui converge simplement vers f . s'il existe $g \in L^2(A)$ telle que l'on ait $|f_n| \leq g$, alors $f \in L^2(A)$ et $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(A)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée classique :

$$|f_n - f|^2 \leq (|f_n| + |f|)^2 \leq 4g^2.$$

□

On en déduit la complétude de $L^2(A)$.

Théorème 7.2.4. L'espace $L^2(A)$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. On procède comme pour $L^1(A)$ en utilisant le critère avec les séries. Soit (u_n) une série de fonctions telle que $\sum \|u_n\|_2$ converge. Comme $\|u_n\|_2 \rightarrow 0$, on en déduit que $\sum \|u_n\|_2^2$ est également convergente, *i.e.*

$$\sum \int_A |u_n|^2 dx < \infty.$$

On va montrer que $\sum u_n(x)$ converge presque partout, définit une fonction à carré intégrable qui est bien la limite $L^2(A)$ de la série. Le premier point est le plus compliqué car il s'agit de trouver la limite.

(i) Tout d'abord, on a grâce à Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_A \left(\sum_0^N |u_n| \right) dx &= \int_A \sum_{k,l=0}^N |u_k| |u_l| dx \\ &\leq \sum_{k,l=0}^N \left(\int_A |u_k|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_A |u_l|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \|u_k\| \right) \left(\sum_{l=0}^n \|u_l\| \right) \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite de fonctions $\left(\sum_{n=0}^N |u_n(x)|\right)^2$ converge presque partout puisque son intégrale est bornée.

(ii) La fonction est bien à carré intégrable. Par convergence monotone, on a

$$\int_A \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \right)^2 dx = \lim \int_A \left(\sum_{n=0}^N |u_n| \right)^2 dx.$$

On déduit du point (i) que $\sum |u_n|$ est à carré intégrable. De l'inégalité $|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$ on déduit que

$$\int_A \left| \sum_0^{\infty} u_n \right|^2 dx \leq \int_A \left(\sum_0^{\infty} |u_n| \right)^2 dx < \infty.$$

(iii) Il reste à montrer que la limite presque partout que l'on a trouvé, qui est à carré intégrable, est bien la limite pour la norme L^2 . Ceci se fait par convergence dominée. Posons f_n la somme partielle et f la limite. On a en effet

$$|f_n - f| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |u_k| \leq \sum_0^{\infty} |u_n|.$$

□

7.2.2 Lien entre $L^1(A)$ et $L^2(A)$

○ Si A est de mesure finie, on a $L^2(A) \subset L^1(A)$ grâce à Cauchy-Schwarz :

$$\int_A 1 \cdot |f| \leq \lambda(A)^{1/2} \left(\int_A |f|^2 \right)^{1/2}.$$

On a en revanche pas égalité comme le montre la considération de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{]0;1[}$.

○ Si A n'est plus de mesure finie, on a plus d'inclusion, comme le montre la fonction $\frac{1}{x} \chi_{[1;+\infty[}$.

○ En revanche, on a $L^\infty(A) \cap L^1(A) \subset L^2(A)$ car

$$|f|^2 \leq \|f\|_\infty |f|.$$

○ Toute fonction de $L^2(A)$ est limite de fonctions dans $L^1(A) \cap L^2(A)$: pour obtenir une suite de fonctions tendant vers f il suffit de considérer la suite $f \chi_{[-n;n]}$.

7.3 Espaces $L^p(A)$

On définit plus généralement l'espace $L^p(A)$ des fonctions telles que $\int_A |f|^p dx < \infty$, qui est un espace complet.

7.4 Sous-espaces denses

On montre successivement que ces espaces de fonctions sont denses dans les espaces $L^p(A)$ considérés.

- Les fonctions étagées. Une fonction peut se décomposer en $f_+ - f_-$, et une fonction positive peut s'écrire comme limite croissante de fonctions étagées. Le théorème de convergence dominée assure la convergence pour la norme voulue.
- Les fonctions en escalier. Cela provient de la régularité de la mesure de Lebesgue : pour tout ensemble mesurable B de mesure finie, on peut trouver des intervalles tels que $B \subset \bigcup_1^n I_k$ et $\lambda(\bigcup_1^n I_k) - \lambda(B) < \varepsilon$. On peut donc approximer toute fonction χ_B , donc toute fonction.
- Les fonctions à support compact.
- Les fonctions C^∞ à support compact.

En application, on peut montrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition 7.4.1. Si f est intégrable, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour une fonction C^∞ à support compact puis d'approximer f par une telle fonction. $\square$

On verra en exercice une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Chapitre 8

Compacité

8.1 Compacité dans les espaces de fonctions continues

Dans cette section, (X, d) désigne un espace métrique et A un sous-ensemble de X .

Définition 8.1.1. On dit que A est **relativement compact** si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.

- Remarques 8.1.2.**
1. Un sous-ensemble relativement compact est borné, car $A \subset \overline{A}$ qui est compact et donc borné.
 2. Si X est un espace normé de dimension finie, A est relativement compact ssi A est borné (il suffit de vérifier que A borné $\implies \overline{A}$ borné, et cela découle de la continuité de la norme).
 3. A est relativement compact ssi toute suite dans A admet une sous-suite qui converge dans X .

Dans le reste de la section, on considère X un espace métrique compact, l'espace $C(X) = C(X, \mathbb{K})$ avec la norme uniforme et la distance associée (qui est un espace normé complet), et $\mathcal{A} \subset C(X)$.

8.1.1 Équicontinuité

Définition 8.1.3. On dit que le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est

1. **équicontinu en $x \in X$** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall f \in \mathcal{A}, \forall y \in X, d(x, y) \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon;$$

2. **équicontinu sur X** s'il est équicontinue en tout point de x ;
3. **uniformément équicontinu sur X** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall f \in \mathcal{A}, \forall x, y \in X, d(x, y) \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 8.1.4. Si $\mathcal{A}$ est équicontinu sur X , alors $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinu (on rappelle que X est compact).

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, il existe $\delta(x) > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall y \in \overline{B}(x, \delta(x)), |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta(x))$. Comme X est compact, il existe donc un entier N et $x_1, \dots, x_N \in X$ tels que $X = \bigcup_{n=1}^N B(x_n, \frac{\delta(x_n)}{2})$. On pose $\delta := \min_{1 \leq n \leq N} \frac{\delta(x_n)}{2} > 0$.

Soient $x, y \in X$ avec $d(x, y) \leq \delta$. Il existe $1 \leq n \leq N$ tel que $x \in B(x_n, \frac{\delta(x_n)}{2})$. On a alors

$$d(y, x_n) \leq d(y, x) + d(x, x_n) < \delta + \frac{\delta(x_n)}{2} \leq \delta(x_n).$$

Ainsi, $x, y \in B(x_n, \delta(x_n))$, donc

$$\forall f \in \mathcal{A}, |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad \square$$

8.1.2 Théorème d'Ascoli

Théorème 8.1.5 (Théorème d'Arzelà-Ascoli). $\mathcal{A}$ est relativement compact dans $C(X)$ ssi $\mathcal{A}$ est borné et uniformément équicontinu sur X (on rappelle que X est compact).

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{A}$ est relativement compact. Alors $\mathcal{A}$ est borné dans $C(X)$.

Montrons que $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinu. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{f \in \mathcal{A}} B\left(f, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un entier N et $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{A}$ tels que

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_{n=1}^N B\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Pour tout n , f_n est uniformément continue sur X (car f_n est continue et X compact), donc il existe $\delta_n > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, d(x, y) \leq \delta_n \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $\delta := \min_{1 \leq n \leq N} \delta_n > 0$. Soient $x, y \in X$ tels que $d(x, y) \leq \delta$ et $f \in \mathcal{A}$. Alors, il existe $1 \leq n \leq N$ tel que $f \in B\left(f_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{A}$ est uniformément équicontinu sur X .

$\Leftarrow$ X est compact, donc séparable (voir le cours de topologie) : il existe une suite $(x_m)_{m \geq 1}$ dense dans X . Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{A}$. On va montrer qu'il existe (f_{n_k}) sous-suite qui converge dans $C(X)$. On va le faire en deux étapes.

1. Il existe $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $\forall m \geq 1, (f_{n_k}(x_m))$ converge.

2. La sous-suite (f_{n_k}) est de Cauchy dans $C(X)$.

La dernière étape implique (f_{n_k}) convergente, car $C(X)$ est complet.

(1) $\mathcal{A}$ est borné, donc il existe $C \geq 0$ telle que $\forall n \geq 1, \|f_n\|_\infty \leq C$. Alors $(f_n(x_1))$ est bornée par C , donc il existe une sous-suite convergente $(f_{n_k^1}(x_1))$.

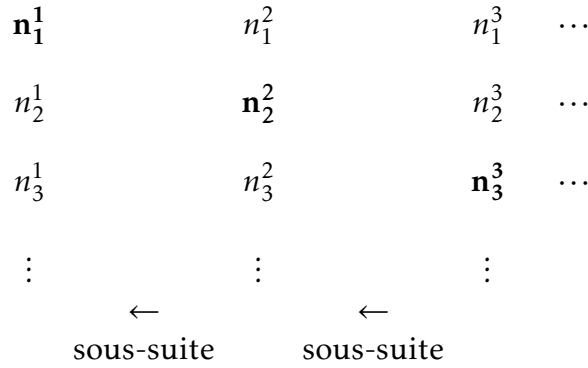
Alors $(f_{n_k^1}(x_2))_{k \geq 1}$ est bornée par C , donc il existe $(f_{n_k^2}(x_2))$ une sous-suite convergente : on a $\{n_k^2; k \geq 1\} \subset \{n_k^1; k \geq 1\}$. Alors $(f_{n_k^2}(x_1))$ est aussi convergente.

De proche en proche, on construit les suites d'indices $(n_k^m)_{k \geq 1}$ pour $m \geq 1$, telles que

— $\forall m \geq 1, (f_{n_k^m}(x_m))_{k \geq 1}$ converge ;

— $(f_{n_k^{m+1}}(x_m))_{k \geq 1}$ est une sous-suite de $(f_{n_k^m}(x_m))_{k \geq 1}$, i.e. $\{n_k^{m+1}; k \geq 1\} \subset \{n_k^m; k \geq 1\}$.

Schéma :



On pose alors $n_k := n_k^k$ (procédure d'extraction diagonale). On a

— $n_{k+1} > n_k$;

— $(n_k)_{k \geq m}$ est une sous-suite de $(n_k^m)_{k \geq 1}$.

Ainsi $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ est la sous-suite voulue.

(2) Montrons que la suite précédente est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall x, y \in X, d(x, y) \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

(x_m) est dense, donc $X = \bigcup_{m \geq 1} B(x_m, \delta)$. Comme X est compact, il existe un entier M et $x_1, \dots, x_M \in X$ tels que $X = \bigcup_{m=1}^M B(x_m, \delta)$. Pour tout m , $(f_{n_k}(x_m))$ est convergente, donc il existe un entier K_m telle que

$$\forall k, \ell \geq K_m, |f_{n_k}(x_m) - f_{n_\ell}(x_m)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Posons $K := \max_{1 \leq m \leq M} K_m$. Soient $k, \ell \geq K$ et $x \in X$. Il existe $1 \leq m \leq M$ telle que $x \in B(x_m, \delta)$. Alors

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_\ell}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_m)| + |f_{n_k}(x_m) - f_{n_\ell}(x_m)| + |f_{n_\ell}(x_m) - f_{n_\ell}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad (d(x, x_m) \leq \delta) \quad (k, \ell \geq K \geq K_m) \quad (d(x, x_m) \leq \delta) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $\|f_{n_k} - f_{n_\ell}\|_\infty \leq \varepsilon$. On a montré que (f_{n_k}) est de Cauchy dans $C(X)$, donc convergente. $\square$

8.2 Opérateurs compacts

Dans cette section, X, Y, Z , désignent des espaces vectoriels normés.

Définition 8.2.1. Un opérateur linéaire $T: X \rightarrow Y$ est dit **compact** si, pour tout $M \subset X$ borné, $T(M)$ est relativement compact. On note $\mathcal{K}(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts entre X et Y .

Proposition 8.2.2. 1. T compact $\implies T$ borné (i.e. $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$).

2. T compact ssi, pour toute suite (x_n) dans X bornée, (Tx_n) admet une sous-suite convergente.
3. Si X est de dimension infinie, alors $I_X: X \rightarrow X$ n'est pas compact.
4. Si T est borné et $T(X)$ de dimension finie (on dit que T est **de rang fini**) alors T est compact.

Démonstration.

(1) Posons $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Alors $T(B)$ est relativement compact, donc borné, c'est-à-dire que $\sup_{x \in B} \|Tx\| < \infty$.

(2) $\implies$ Posons $R := \sup_{n \geq 1} \|x_n\|$. Alors (Tx_n) est une suite dans $T(\overline{B(0, R)})$ qui est relativement compact, donc elle admet une sous-suite convergente.

$\Leftarrow$ Soit $M \subset X$ borné et (y_n) suite dans $T(M)$. Il existe (x_n) dans M telle que $y_n = Tx_n$. Par hypothèse, (Tx_n) admet une sous-suite convergente. Ainsi, $T(M)$ est relativement compact.

(3) $\overline{I_X(B)} = B$ n'est pas compacte si X est de dimension infinie, d'après le théorème de Riesz.

(4) Soit $M \subset X$ borné. Alors $T(M)$ est un sous-ensemble borné de $T(X)$ qui est de dimension finie, donc $T(M)$ est relativement compact. $\square$

Proposition 8.2.3. 1. $\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X, Y)$.

2. Soit $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$. Si T ou S est compact, alors ST est compact.
3. Supposons que Y est complet. Alors $\mathcal{K}(X, Y)$ est fermé dans $\mathcal{B}(X, Y)$: si (T_n) est une suite dans $\mathcal{K}(X, Y)$ telle que $T_n \rightarrow T$ dans $\mathcal{B}(X, Y)$, alors $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Démonstration. (1) et (2) en exercice (Indication : utiliser la caractérisation par les suites [Proposition 8.2.2 (2)]).

(3) Soit (x_m) suite bornée dans X . Notons $c := \sup \|x_m\|$ (on peut supposer $c > 0$, sinon $x_m = 0 \forall m \geq 1$). On va montrer que (Tx_m) admet une sous-suite convergente.

Étape 1 (extraction diagonale, comme dans la preuve d'Arzelà-Ascoli)

$T_1 \in \mathcal{K}(X, Y)$, donc il existe $(x_{m_k^1})$ sous-suite de (x_m) telle que $(T_1 x_{m_k^1})$ converge.

$T_2 \in \mathcal{K}(X, Y)$, donc il existe $(x_{m_k^2})$ sous-suite de $(x_{m_k^1})$ telle que $(T_1 x_{m_k^2})$ converge.
etc...

On pose $m_k := m_k^k$ pour tout $k \geq 1$. Alors $(T_n x_{m_k})_{k \geq 1}$ converge pour tout $n \geq 1$.

Étape 2 Montrons que $(T x_{m_k})$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N = N(\varepsilon) \geq 1$ tel que $\forall n \geq N, \|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3c}$.

Alors $(T_N x_{m_k})$ converge, donc est de Cauchy, donc il existe $K = K(N, \varepsilon) = K(\varepsilon)$ tel que

$$\forall k, \ell \geq K, \|T_N x_{m_k} - T_N x_{m_\ell}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soient $k, \ell \geq K$. Alors

$$\begin{aligned} \|T x_{m_k} - T x_{m_\ell}\| &\leq \|T x_{m_k} - T_N x_{m_k}\| + \|T_N x_{m_k} - T_N x_{m_\ell}\| + \|T_N x_{m_\ell} - T x_{m_\ell}\| \\ &\leq \|T - T_N\| \|x_{m_k}\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T - T_N\| \|x_{m_\ell}\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $(T x_{m_k})$ est de Cauchy dans Y complet, donc converge. $\square$

Proposition 8.2.4. Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des espaces de Hilbert. Si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors $T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

Démonstration. Soit (y_n) une suite bornée dans $\mathcal{H}_2$. On pose $c := \sup \|y_n\|$. Pour tous $m, n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|T^* y_m - T^* y_n\|^2 &= \langle T^* y_m - T^* y_n, T^* y_m - T^* y_n \rangle \\ &= \langle y_m - y_n, T T^* y_m - T T^* y_n \rangle \\ &\leq \|y_m - y_n\| \|T T^* y_m - T T^* y_n\| \leq 2c \|T T^* y_m - T T^* y_n\|. \end{aligned}$$

(Cauchy-Schwarz)

On pose $(x_n) := (T^* y_n)$. (x_n) est bornée, donc il existe (x_{n_k}) sous-suite telle que $(T x_{n_k})$ converge, donc est de Cauchy. On a

$$\|T^* y_{n_k} - T^* y_{n_\ell}\| \leq 2c \|T x_{n_k} - T x_{n_\ell}\|,$$

donc $(T^* y_{n_k})_{k \geq 1}$ est de Cauchy, donc converge car $\mathcal{H}_1$ est complet. Ainsi T^* est compact. $\square$

Proposition 8.2.5. Soit $T : X \rightarrow Y$ un opérateur compact entre deux Banach. Si (x_n) converge faiblement, alors $(T x_n)$ converge fortement.

Démonstration. On peut supposer que la limite est 0. Si par l'absurde il existe une sous-suite telle que $\|T x_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$, alors quitte à réextraire on peut supposer que $(T x_{n_k})$ converge. Sa limite faible étant 0, on a une contradiction. $\square$

Corollaire 8.2.6. Si dans un Hilbert $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormée, et T est compact, alors $\|T e_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Démonstration. La série de terme général $|\langle x, e_k \rangle|^2$ converge, donc e_k tend faiblement vers 0. $\square$

Exemple 8.2.7. Sur $\ell^2(\mathbb{C})$, soit λ une suite bornée. L'application de multiplication $(u_n) \mapsto (\lambda_n u_n)$ est un opérateur compact si et seulement si λ_n tend vers 0.

Exemple 8.2.8. L'opérateur de Volterra $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$, défini sur l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$ muni de la norme uniforme.

8.3 Opérateurs de Hilbert-Schmidt

On voit maintenant une famille d'opérateurs compacts, appelés opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Proposition 8.3.1. Soit (e_n) une base hilbertienne de H et A un opérateur. On définit

$$|||T|||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2.$$

Ce nombre (fini ou pas) ne dépend pas de la base hilbertienne choisie et $|||T|| = |||T^*||$.

Démonstration. On a pour une autre base $\sum \|Te_p\|^2 = \sum \langle Te_p, f_q \rangle^2 = \sum \|T^*f_q\|^2$, d'où les résultats. $\square$

Définition 8.3.2. Un opérateur de Hilbert-Schmidt est un opérateur tel que $|||T||$ soit fini. On a alors $\|T\| \leq |||T||$.

Théorème 8.3.3. Un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.

Démonstration. Un opérateur est la limite des opérateurs de rang fini $\pi_n \circ T$, où π_n est la projection sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$. $\square$

Soit $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on pose alors

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y)f(y)dy.$$

Théorème 8.3.4. L'application ci-dessus est définie pour presque tout x , définit un élément de $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'application K est un opérateur de Hilbert-Schmidt dont la norme de Hilbert-Schmidt est $|||K|||^2 = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} k(x, y)^2 dx dy$. Réciproquement, tout opérateur de Hilbert-Schmidt est de cette forme.

Lemme 8.3.5. Si φ_p est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi_{pq}(x, y) = \varphi_p(x)\overline{\varphi_q(y)}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Par Cauchy-Schwarz, on a

$$|Kf(x)|^2 \leq \|f\|^2 \int |k(x, y)|^2 dy.$$

D'où

$$\|Kf\|^2 \leq \|f\|^2 \|k\|^2.$$

On a de plus $\langle K\varphi_p, \varphi_q \rangle = \langle k, \varphi_{pq} \rangle$, ce qui permet de montrer qu'on a bien un opérateur de Hilbert-Schmidt. Réciproquement, soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt. Soit $a_{ij} = \langle T\varphi_j, \varphi_i \rangle$ et posons $k(x, y) = \sum a_{ij} \varphi_{ij}(x, y)$. Cette série converge bien dans L^2 car T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, de sorte que la famille $|a_{ij}|^2$ est sommable.

Soient maintenant $f, g \in L^2$. On écrit $g = \sum z_i \varphi_i$, et $f = \sum x_j \varphi_j$ et $Tf = \sum y_i \varphi_i$, où $y_i = \sum a_{ij} x_j$. On a donc

$$\begin{aligned} \langle g, Tf \rangle &= \sum x_j \overline{z_i} = \sum a_{ij} x_j \overline{z_i} \\ &= \langle f \otimes \bar{g}, k \rangle \\ &= \int \left(\int k(x, y) f(y) dy \right) \overline{g(x)} dx. \end{aligned}$$

□

Chapitre 9

Applications à la théorie de Fourier

On revisite les séries de Fourier du point de vue des espaces de Hilbert. C'est donc tout naturellement qu'on considère l'espace de Hilbert des fonctions 1-périodiques à carré intégrable : $L^2([0; 1[)$.

9.1 Convergence L^2

Théorème 9.1.1. La famille de fonctions $e_n : x \mapsto e^{2i\pi nx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de $L^2([0; 1[)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{]0; 1[} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Démonstration. On vérifie aisément qu'ils forment un système orthonormé. On sait également que l'espace qu'ils engendrent est dense, ce qui permet de conclure. $\square$

On pose

$$c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} f(t) dt,$$

ainsi que

$$S_N(f) = \sum_{-N}^N c_n(f) e_n.$$

Comme les e_n forment une base hilbertienne, on a que $S_N(f)$ converge vers f pour la norme L^2 , ce qui ne signifie absolument pas que la série converge en tout point et que l'on a égalité avec f . Du fait que l'on a une base hilbertienne, on en déduit le théorème suivant.

Théorème 9.1.2. On a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\text{per}} : L^2([0; 1[) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & (c_n(f)) \end{array}.$$

Remarque 9.1.3. De plus, cette application intervertit produit et produit de convolution quand il ils sont définis.

9.2 Convergence ponctuelle

Rappelons que grâce à Cauchy-Schwarz, on a $L^2(]0;1[) \subset L^1(]0;1[)$. La définition des coefficients de Fourier a également un sens pour les fonctions intégrables. On pose donc pour $f \in L^1(]0;1[)$:

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} f(t) dt.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue, on sait que $c_n(f) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \pm\infty$. On appelle série de Fourier la série de fonctions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2i\pi nx}.$$

Ainsi on a

$$\mathcal{F}_{\text{per}} : L^1(]0;1[) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}).$$

Déterminer l'image dans l'espace $c_0(\mathbb{Z})$ des suites qui tendent vers 0 est un problème compliqué. On a tout de même que les coefficients de Fourier déterminent uniquement la fonction presque partout. On verra que l'application n'est pas surjective et on donnera l'image de l'espace des fonctions C^∞ .

Théorème 9.2.1. (propriété d'injectivité) Deux fonctions intégrables qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales presque partout.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si les coefficients de h sont nuls, la fonction est nulle presque partout. Tout d'abord, si la fonction est dans L^2 , elle est bien nulle grâce à l'isomorphisme dans le cas L^2 . Par le cours de théorie de la mesure, on sait que la fonction

$$H(x) = \int_0^x h(t) dt = \int_0^1 \chi_{[0;x]}(t) h(t) dt,$$

est continue, presque partout dérivable et de dérivée h . On peut calculer ses coefficients de Fourier :

$$c_n(H) = \int_0^1 \left(\int_t^1 e^{-2i\pi nx} dx \right) h(t) dt.$$

On a donc

$$c_0(H) = \int_0^1 (1-t) h(t) dt \text{ et } c_n(H) = \frac{1}{2i\pi n} (c_0(h) - c_n(h)) \text{ sinon.}$$

La fonction continue $H - c_0(H)$ a donc tous ses coefficients nuls, ce qui la force à être nulle. D'où le résultat. $\square$

Remarque 9.2.2. On peut montrer (résultat difficile dû à Carleson) que si $f \in L^2$, la série de Fourier converge presque partout vers f . Mais on ne peut pas faire beaucoup plus. Considérons par exemple la série

$$\sum_n \frac{1}{n} \cos(2i\pi 2^n x).$$

La série converge dans L^2 mais diverge en tout point de la forme $\frac{j}{2^n}$ car elle coïncide ultimement avec la série harmonique.

En rajoutant des hypothèses, on peut faire converger la série.

Théorème 9.2.3. Si f est telle que $\sum |c_n(f)|$ converge, alors la série de Fourier est normalement convergente, égale presque partout à f . La série définit de plus une fonction continue.

Démonstration. On peut définir la série de fonctions $\sum c_n(f)e^{2i\pi nx}$ qui est continue vu que la série converge normalement. Ses coefficients sont les mêmes que f , donc $f(x) = \sum c_n(f)e^{2i\pi nx}$. $\square$

Corollaire 9.2.4. Si f est C^1 , alors la série de Fourier est normalement convergente, égale presque partout à sa limite.

Démonstration. On a $c_n(f) = \frac{1}{2i\pi n} c_n(f')$, qui est donc le produit de deux suites dans ℓ^2 , elle est donc dans ℓ^1 . $\square$

9.3 Théorème de Dirichlet

On peut calculer le noyau de Dirichlet

$$D_N(x) = \sum_{-N}^N e^{2i\pi nx} = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}.$$

La somme partielle s'écrit alors

$$S_N(f)(x) = D_N * f(x) = \int_0^1 D_N(x-t)f(t)dt.$$

On va utiliser cette expression pour montrer qu'on a convergence de la série de Fourier vers la valeur de la fonction dans certains cas.

Lemme 9.3.1. Si f est 1-périodique, intégrable, et $x_0 \in [0;1]$ est tel qu'il existe l avec $x \mapsto \frac{f(x)-l}{x-x_0}$ est intégrable au voisinage de x_0 , alors la série de Fourier est convergente en x_0 de limite valeur l .

Démonstration. On utilise le noyau de Dirichlet $D_N(x) = \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)}$ et le lemme de Riemann-Lebesgue. $\square$

Remarque 9.3.2. Le lemme reste valable si on suppose l'existence de $l_{\pm}$ en regardant séparément les intégrales à droite et à gauche de x_0 . La limite est alors $\frac{l_+ + l_-}{2}$.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 9.3.3. (Dirichlet) Si f est 1-périodique et C^1 par morceaux, alors la série de Fourier converge en tout point et

$$\sum c_n(f)e^{2i\pi nx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Démonstration. On regarde $S_n(f)(x) - l$. Quitte à traduire, On peut supposer que $l = 0$ et $x_0 = 0$, puis on applique Riemann-Lebesgue. $\square$

Théorème 9.3.4. L'application $\mathcal{F}_{\text{per}} : L^1 \rightarrow c_0$ n'est pas surjective.

Démonstration. On a vu que la transformée de Fourier périodique donne une application linéaire continue

$$\mathcal{F}_{\text{per}} : (L^1([0; 1]), \| \cdot \|_1) \rightarrow (c_0(\mathbb{Z}), \| \cdot \|_\infty).$$

Comme cette application est injective, si elle était surjective, ce serait un isomorphisme et l'inverse serait également continu par le théorème de l'isomorphisme de Banach. Cependant, $\|D_N\|_1$ vérifie

$$\|D_N\|_1 \geq \int_0^{2N+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi x} dx \rightarrow \infty,$$

alors que les coefficients de Fourier sont bornés. L'application n'est donc pas surjective. $\square$

Remarque 9.3.5. On sait toutefois que l'on a une bijection entre l'espace des fonctions continues et l'espace de Schwartz $s(\mathbb{Z})$ des suites telles que $n^k c_n(f) \rightarrow 0$ pour tout $k \geq 0$.

9.4 Intervention de l'analyse fonctionnelle

On peut se demander s'il est possible d'affaiblir les hypothèses du théorème de Dirichlet en supposant seulement f continue, puis avoir une forme de convergence. Il n'en est rien.

On considère l'espace de Banach des fonctions continues 1-périodiques muni de la norme uniforme. On a les formes linéaires continues

$$u_n(f) = S_n(f)(0).$$

Elles sont en effet continues puisque

$$|u_n(f)| \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty.$$

On a en fait même $\|u_n\| = \|D_n\|_1$ en considérant une suite de fonctions qui approche $|D_n(x)|$. Comme la suite n'est pas bornée, elle n'est pas ponctuellement bornée par contraposée de Banach-Steinhaus. On en déduit l'existence d'une fonction continue où la série de Fourier diverge en 0.

Chapitre 10

Applications à la transformée de Fourier

On utilise maintenant la théorie des espaces de Hilbert pour l'appliquer à la transformée de Fourier.

10.1 Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

Définition 10.1.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx.$$

Remarque 10.1.2. Il est possible d'intuiter la formule comme limite des séries de Fourier en faisant tendre la période vers l'infini. La reconstruction de la fonction à partir de la série suggère la formule d'inversion. Le coefficient s'écrit en effet

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2i\pi nt/T} f(t) dt.$$

En posant $\xi_n = \frac{n}{T}$, et $d\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{1}{T}$, il vient la formule de la transformée avec $c_n(f) = \mathcal{F}f(\xi) d\xi$. Quand à la formule de reconstruction,

$$f(x) = \sum_n c_n(f) e^{2i\pi nx/T},$$

en faisant tendre T vers l'infini, la somme tend vers l'intégrale.

La transformée de Fourier est une fonction bornée qui tend vers 0 en l'infini par le lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition 10.1.3. (i) $\mathcal{F}$ conserve la parité.

(ii) Grâce à Fubini, si f et g sont intégrables, alors

$$\int (\mathcal{F}f)g = \int f(\mathcal{F}g).$$

(iii) Si $f \in C^1 \cap L^1$ et $\partial f \in L^1$, alors

$$\mathcal{F}(\partial f) = 2i\pi\xi \mathcal{F}f.$$

(iv) Si $f, xf \in L^1$, alors $\mathcal{F}f$ est dérivable et

$$\partial(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(-2i\pi xf).$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 10.1.4. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit standard.

Démonstration. Utiliser Fubini. □

10.2 Inversion

10.2.1 Transformée des Gaussiennes

Proposition 10.2.1. La transformée de Fourier de la Gaussienne $g(x) = e^{-ax^2}$ est

$$\mathcal{F}g(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\pi^2 \xi^2 / a}.$$

Démonstration. Si on note ψ la transformée de Fourier, en dérivant sous le signe intégral puis en pratiquant une intégration par parties, on voit que $\psi'(\xi) = -\frac{2\pi^2}{a}\xi\psi(\xi)$. □

Lemme 10.2.2. On note $g_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ la gaussienne normalisée. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} \mathcal{F}g_\sigma(\xi) d\xi = g_\sigma(x).$$

Lemme 10.2.3. On a la formule d'inversion

$$(g_\sigma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi x\xi} \mathcal{F}g_\sigma(\xi) \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Démonstration. Remplacer $\mathcal{F}f$ par sa forme intégrale puis utiliser Fubini. □

10.2.2 Propriété d'injectivité

Théorème 10.2.4. (propriété d'injectivité) Si $f, g \in L^1$ ont même transformée de Fourier, alors $f = g$.

Démonstration. On utilise la transformée de Fourier des Gaussiennes et la régularisation Gaussienne : $g_\sigma * f$ est déterminée par la transformée de Fourier de f . Comme $f * g_\sigma$ tend vers f dans L^1 quand σ tend vers 0, on peut conclure. □

Remarque 10.2.5. L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est continue et injective, mais n'est pas un isomorphisme.

Théorème 10.2.6. Si $f \in L^1$ et $\mathcal{F}f$ est également dans L^1 , alors on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

Démonstration. Quitte à extraire, on peut supposer que $f * g_{\sigma_n}$ converge presque partout vers f . On peut ensuite appliquer le théorème de convergence dominée à la formule d'inversion gaussienne. $\square$

10.2.3 Applications

Exemple 10.2.7. La transformée de Fourier de $f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$ est

$$\mathcal{F}f_a(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + \xi^2},$$

d'où la transformée de Fourier de cette dernière par inversion. On a de plus $f_a * f_b = \pi f_{a+b}$.

Proposition 10.2.8. $\mathcal{F}(L^1)$ est dense dans C_0 .

Démonstration. On utilise Stone-Weierstrass : l'image est une algèbre, en tout point il existe une fonction qui ne s'annule pas, en tous points distincts il existe une fonction qui prend des valeurs différentes, et stable par conjugaison. $\square$

Proposition 10.2.9. Si $f, g, fg, \mathcal{F}f$ et $\mathcal{F}g$ sont dans L^1 , alors

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g.$$

10.3 Transformée de Fourier sur L^2

Contrairement au cas des fonctions périodiques, définir la transformée de Fourier sur L^2 n'est pas évident. On ne peut pas en effet définir par la formule dans le cas intégrable précisément parce que la fonction ne l'est pas forcément. On va ruser.

Lemme 10.3.1. Soit φ une fonction C^∞ à support compact. Alors on a $\mathcal{F}\varphi \in L^2$ et

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2.$$

Démonstration. On pose $\psi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x} \overline{\varphi(x)} dx = \overline{(\mathcal{F}\varphi)(\xi)}$. On a

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\varphi) \overline{\mathcal{F}\varphi} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathcal{F}\psi(x) dx.$$

Par inversion de Fourier, cette dernière intégrale est en fait $\|\varphi\|_2^2$. $\square$

Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il est possible de prolonger l'isométrie à L^2 tout entier. L'adjoint de $\mathcal{F}$ est en fait son inverse.

Théorème 10.3.2. (Plancherel) $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ est un isomorphisme isométrique. Son inverse est donné par $\mathcal{F}^{-1}f(x) = (\mathcal{F}f)(-x) = \mathcal{F}(f(-x))$. De plus, $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$, i.e. l'opérateur est unitaire.

Démonstration. On a déjà vu que l'opérateur est une isométrie, qui est donc injective. Son image est donc fermée, et dense grâce à l'inversion de Fourier des fonctions à support compact, ce qui permet de conclure. $\square$

Exemple 10.3.3. Pour calculer $\mathcal{F}f$ où $f \notin L^1$, on peut utiliser une intégrale impropre. Par exemple, grâce au calcul des résidus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\xi x} \frac{x}{1+x^2} dx = -i\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-2\pi|\xi|}.$$

On peut aussi utiliser le théorème de Plancherel. La transformée de Fourier de $\chi_{[-a;a]}$ est $\mathcal{F}f(t) = \frac{\sin(2\pi at)}{\pi t}$, d'où la transformée de Fourier de cette dernière, puisqu'elle est dans L^2 mais pas dans L^1 .

10.4 Non surjectivité dans le cas intégrable

Théorème 10.4.1. $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0$ n'est pas surjective.

Démonstration. Si par l'absurde l'application était surjective, ce serait un isomorphisme. Donc par l'isomorphisme de Banach, il existerait une constante c telle que

$$\|Ff\|_{\infty} \geq c\|f\|_1.$$

On prenant $f = f_a$ on a

$$\frac{1}{\pi a^2} \geq \frac{c}{\pi a},$$

ce qui est absurde. $\square$

Chapitre 11

Théorie Spectrale

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on note $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

11.1 Spectre et valeurs propres d'un opérateur

Définition 11.1.1. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une **valeur régulière** de T si $T_\lambda := T - \lambda I$ a un inverse dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On note $\rho(T)$ l'ensemble des valeurs régulières. L'opérateur T_λ^{-1} est appelé la **résolvante** de T et noté $R(\lambda)$ ou R_λ .

On appelle **spectre de T** l'ensemble $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ et $\lambda \in \sigma(T)$ est dite **valeur spectrale**.

Remarques 11.1.2. 1. Un inverse de T_λ est un $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $ST_\lambda = T_\lambda S = I$. Par le théorème de l'isomorphisme, T_λ a un inverse ssi l'application $T_\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est bijective.

2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$ (T_λ n'est pas injective);
- $T_\lambda(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$ (T_λ n'est pas surjective).

Définition 11.1.3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$, on dit que

1. λ est une **valeur propre** de T ;
2. $\mathcal{N}(T_\lambda)$ est l'**espace propre** associé à λ ;
3. un $x \in \mathcal{N}(T_\lambda) \setminus \{0\}$ est un **vecteur propre** associé à λ .

L'ensemble des valeurs propres est appelé **spectre ponctuel** de T et noté $\sigma_p(T)$.

Proposition 11.1.4. $\sigma(T)$ est fermé et contenu dans $\overline{B}(0, \|T\|) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|T\|\}$.

Lemme 11.1.5. Supposons que X soit un Banach, $U \in \mathcal{B}(X)$ et $\|U\| < 1$. Alors, la série $\sum_{n \geq 0} U^n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} U^n$ est l'inverse de $I - U$.

Démonstration du lemme. Pour tout $n \geq 0$, $\|U^n\| \leq \|U\|^n$ donc $\sum_{n \geq 0} \|U^n\|$ est convergente, c'est-à-dire que $\sum_{n \geq 0} U^n$ est absolument convergente. Alors la série $\sum_{n \geq 0} U^n$ est convergente, car $\mathcal{B}(X)$ est complet.

Posons

$$V_n := I + U + \cdots + U^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}(I - U)V_n &= I + U + \dots + U^n \\ &\quad - U - U^2 - \dots - U^{n+1} \\ &= I - U^{n+1}.\end{aligned}$$

Comme $\sum U^n$ est convergente, $V_n \rightarrow V := \sum_{n=0}^{\infty} U^n$ et $U^{n+1} \rightarrow 0$, donc $(I - U)V = I$. De même, $V(I - U) = I$. $\square$

Démonstration de la proposition 11.1.4.

Étape 1. Montrons $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \|T\|) \subset \rho(T)$ ($\iff \sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $|\lambda| > \|T\|$. Alors

$$T_\lambda = T - \lambda I = (-\lambda)(I - \lambda^{-1}T).$$

On a $\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| < 1$, donc $I - \lambda^{-1}T$ est inversible, donc T_λ aussi, donc $\lambda \in \rho(T)$.

Étape 2. Montrons que $\rho(T)$ est ouvert ($\iff \sigma(T)$ est fermé).

Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}T_\lambda &= T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I \\ &= (T - \lambda_0 I)(I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}).\end{aligned}$$

Si $|\lambda - \lambda_0| < \|T_{\lambda_0}^{-1}\|^{-1}$, alors $\|(\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}^{-1}\| < 1$, donc $I - (\lambda - \lambda_0)T_{\lambda_0}^{-1}$ est inversible, donc T_λ est inversible.

Ainsi, $B(\lambda_0, \|T_{\lambda_0}^{-1}\|^{-1}) \subset \rho(T)$. $\rho(T)$ est donc ouvert. $\square$

Théorème 11.1.6. Si $\mathcal{H} \neq \{0\}$, $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Démonstration. Exercices. $\square$

En dimension finie, cela provient de Cayley-Hamilton qui garantit que le polynôme caractéristique possède une racine. Cette preuve ne fonctionne pas en dimension infinie.

Proposition 11.1.7. Si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie et T est compact, alors $0 \in \sigma(T)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $0 \notin \sigma(T)$, alors T est inversible, donc $I = TT^{-1}$ est compact, en contradiction avec $\mathcal{H}$ de dimension infinie. $\square$

11.2 Spectre d'un opérateur autoadjoint

Lemme 11.2.1. Si T auto-adjoint,

$$\forall x \in \mathcal{H}, \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. L'égalité découle de $T^* = T : \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$. $\square$

Proposition 11.2.2. Si T est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Démonstration. Soient $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $x \in \mathcal{N}(T_\lambda) \setminus \{0\}$. Alors $\langle Tx, x \rangle = \lambda \|x\|^2$, donc

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Soient $\mu \in \sigma_p(T)$, $\mu \neq \lambda$ et $y \in \mathcal{N}(T_\mu) \setminus \{0\}$. Alors

$$\langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

et

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \bar{\mu} \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Ainsi $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$, donc $\langle x, y \rangle = 0$. □

Proposition 11.2.3. Supposons T auto-adjoint. Alors

$$\lambda \in \rho(T) \iff \exists c > 0 \text{ telle que } \forall x \in \mathcal{H}, \|T_\lambda x\| \geq c \|x\|. \quad (11.1)$$

Remarque 11.2.4. Les énoncés suivants sont équivalents à (11.1) (à vérifier en exercice).

1. $\lambda \in \rho(T) \iff \exists c > 0$ telle que $\forall x \in \mathcal{S}, \|T_\lambda x\| \geq c$.
2. $\lambda \in \sigma(T) \iff \exists (x_n)$ suite dans $\mathcal{S}$ telle que $T_\lambda x_n \rightarrow 0$.

Démonstration de la proposition 11.2.3.

$\implies$ Soient $\lambda \in \rho(T)$ et $x \in \mathcal{H}$. On a

$$\|x\| = \|T_\lambda^{-1} T_\lambda x\| \leq \|T_\lambda^{-1}\| \|T_\lambda x\|$$

et on pose $c = \|T_\lambda^{-1}\|^{-1}$.

$\Leftarrow$ On va montrer que T_λ est inversible en 3 étapes :

- (a) T_λ est injectif;
- (b) $T_\lambda(\mathcal{H})$ fermé;
- (c) $T_\lambda(\mathcal{H})^\perp = \{0\}$.

En effet, (b)&(c) $\implies T_\lambda(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, donc T_λ est bijectif, donc $\lambda \in \rho(T)$.

(a) $T_\lambda x = 0 \implies c \|x\| = 0 \implies x = 0$. Ainsi, $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$.

(b) Soit (y_n) suite dans $T_\lambda(\mathcal{H})$ telle que $y_n \rightarrow y \in \mathcal{H}$. Il existe (x_n) suite dans $\mathcal{H}$ telle que $y_n = T_\lambda x_n$. De plus, pour tous $m, n \geq 1$,

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{c} \|T_\lambda x_m - T_\lambda x_n\| = \frac{1}{c} \|y_m - y_n\|.$$

(y_n) converge $\implies (y_n)$ de Cauchy $\implies (x_n)$ de Cauchy $\implies (x_n)$ converge (car $\mathcal{H}$ complet). On pose $x := \lim x_n$. Par continuité de T_λ , $y = T_\lambda x$, donc $y \in T_\lambda(\mathcal{H})$.

(c) Soit $y \in T_\lambda(\mathcal{H})^\perp$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle T_\lambda x, y \rangle = 0,$$

donc

$$\langle Tx, y \rangle - \lambda \langle x, y \rangle = 0$$

donc

$$\langle x, T - \bar{\lambda} y \rangle = \langle x, T_{\bar{\lambda}} y \rangle = 0.$$

Ainsi $T_{\bar{\lambda}} y = 0$. Si $y \neq 0$, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de T , donc réel, donc $T_{\lambda} y = 0$, donc $y \in \mathcal{N}(T_{\lambda}) = \{0\}$, contradiction. Ainsi, $y = 0$. On a bien $T_{\lambda}(\mathcal{H})^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Définition 11.2.5. On appelle **image numérique** de T l'ensemble

$$\mathcal{E}(T) := \{\langle Tx, x \rangle; x \in \mathcal{S}\} \subset \mathbb{C}.$$

Remarques 11.2.6. 1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{E}(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$.

2. Si T est auto-adjoint, $\mathcal{E}(T) \subset \mathbb{R}$, donc $\mathcal{E}(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Proposition 11.2.7. Supposons T auto-adjoint. Posons $M := \sup \mathcal{E}(T)$ et $m := \inf \mathcal{E}(T)$. Alors

1. $\sigma(T) \subset \overline{\mathcal{E}(T)}$;
2. $m, M \in \sigma(T)$;
3. $\|T\| := \max\{|m|, |M|\}$.

Remarque 11.2.8. On a en particulier que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est dans $\sigma(T)$.

Démonstration de la proposition 11.2.7.

(1) Montrons que $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{E}(T)} \subset \rho(T)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{E}(T)}$. Il existe $c > 0$ tel que

$$\text{dist}(\lambda, \overline{\mathcal{E}(T)}) \geq c.$$

Soit $x \in \mathcal{S}$. On a

$$|\langle Tx, x \rangle - \lambda| \geq c,$$

donc

$$|\langle T_{\lambda} x, x \rangle| \geq c.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle T_{\lambda} x, x \rangle| \leq \|T_{\lambda} x\| \|x\| = \|T_{\lambda} x\|,$$

donc $\|T_{\lambda} x\| \geq c$.

Ainsi $\lambda \in \rho(T)$.

(2) Posons $q_0(x, y) := \langle Tx, y \rangle$. Alors

$$\forall x \in \mathcal{H}, m\|x\|^2 \leq q_0(x, x) \leq M\|x\|^2 \quad (11.2)$$

(on le prouve par homogénéité, i.e. en divisant par $\|x\|$).

Posons $q_m(x, y) := \langle (T_m)x, y \rangle$. Alors q_m est

- linéaire à gauche, linéaire-conjuguée à droite;
- positive : $q_m(x, x) = \langle Tx, x \rangle - m\|x\|^2 \geq 0$.

Ainsi (exercice, reprendre la démonstration de la proposition 5.2.1), q_m vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, |q_m(x, y)| \leq q_m(x, x)^{\frac{1}{2}} q_m(y, y)^{\frac{1}{2}},$$

Donc

$$|\langle (T_m)x, y \rangle| \leq \langle (T_m)x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle (T_m)y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Il existe une suite (x_n) dans $\mathcal{S}$ telle que $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow m$. Posons $y_n := (T_m)x_n$. Alors (y_n) est bornée dans $\mathcal{H}$, donc $(\langle (T_m)y_n, y_n \rangle)$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On a

$$\|(T_m)x_n\|^2 = \langle (T_m)x_n, y_n \rangle \leq (\langle Tx_n, x_n \rangle - m)^{\frac{1}{2}} \langle (T_m)y_n, y_n \rangle^{\frac{1}{2}},$$

donc $\|T_m x_n\| \rightarrow 0$. Ainsi $m \in \sigma(T)$.

En appliquant le résultat à $-T$, on trouve $-M \in \sigma(-T)$, donc $M \in \sigma(T)$.

(3) Posons $C := \max\{|m|, |M|\}$. On a $C \leq \|T\|$. Montrons l'inégalité suivante :

$$|q_0(x, y)| \leq C \|x\| \|y\|. \quad (11.3)$$

D'après l'inégalité (11.2), on a

$$\forall x \in \mathcal{H}, |q_0(x, x)| \leq C \|x\|^2.$$

Soient $x, y \in \mathcal{S}$. Comme q_0 est linéaire à gauche et linéaire conjuguée à droite,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q_0(x, y)) &= \frac{1}{4} (q_0(x + y, x + y) - q_0(x - y, x - y)) \leq \frac{C}{4} (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &= \frac{C}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq C. \end{aligned}$$

(identité du parallélogramme)

Notons $q_0(x, y) = |q_0(x, y)| e^{i\theta}$, $\tilde{y} := e^{i\theta} y$ et appliquons l'inégalité précédente à $x, \tilde{y}$. Alors

$$|q_0(x, y)| = e^{-i\theta} q_0(x, y) = q_0(x, \tilde{y}) = \operatorname{Re}(q_0(x, \tilde{y})) \leq C.$$

Par homogénéité, on a l'inégalité (11.3).

On applique alors (11.3) pour $x \in \mathcal{H}$ et $y := Tx$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, y \rangle \leq C \|x\| \|y\| = C \|x\| \|Tx\|,$$

donc $\|Tx\| \leq C \|x\|$. Ainsi, $\|T\| \leq C$. □

Chapitre 12

Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints

Théorème 12.0.1 (Alternative de Fredholm). Supposons que T est compact. Alors

1. $\mathcal{N}(I - T)$ est de dimension finie ;
2. $(I - T)(\mathcal{H}) = \mathcal{N}(I - T^*)^\perp$.

En particulier, si T est compact et auto-adjoint,

$$I - T \text{ injectif} \iff I - T \text{ surjectif} \iff I - T \text{ bijectif.}$$

Remarque 12.0.2. Alternative de Fredholm, si T est compact et auto-adjoint :

- ou bien $I - T$ est inversible ;
- ou bien il existe $x \neq 0$ tel que $(I - T)x = 0$.

Démonstration.

(1) Posons $\mathcal{N} := \mathcal{N}(I - T)$ et $B' := B \cap \mathcal{N}$. B' est la boule unité de $\mathcal{N}$ et $B' = T(B')$. Comme T est compact, B' est relativement compacte, donc compacte car elle est fermée. Par le théorème de Riesz, $\mathcal{N}$ est donc de dimension finie.

(2) On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &:= (I - T)(\mathcal{H}); \\ \mathcal{N}_* &:= \mathcal{N}(I - T^*).\end{aligned}$$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{N}_*^\perp$. Soit $y \in \mathcal{F}$. Il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que $y = (I - T)x$. Alors

$$\forall z \in \mathcal{N}_*, \langle y, z \rangle = \langle (I - T)x, z \rangle = \langle x, (I - T^*)z \rangle = 0.$$

Ainsi $y \in \mathcal{N}_*^\perp$.

$\mathcal{N}_*^\perp \subset \mathcal{F}$. Montrons d'abord que $\mathcal{F}^\perp \subset \mathcal{N}_*$. Soit $y \in \mathcal{F}^\perp$. Alors

$$\forall z \in \mathcal{H}, \langle (I - T^*)y, z \rangle = \langle y, (I - T)z \rangle = 0.$$

Ainsi, $(I - T^*)y = 0$, donc $y \in \mathcal{N}_*$. On a donc $\mathcal{N}_*^\perp \subset (\mathcal{F}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{F}}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est fermé.

Soit (y_n) une suite dans $\mathcal{F}$ telle que $y_n \rightarrow y \in \mathcal{H}$. Il existe (x_n) suite dans $\mathcal{H}$ telle que $y_n = (I - T)x_n$. On pose $z_n := P_{\mathcal{N}^\perp}x_n$ (projection orthogonale sur $\mathcal{N}^\perp$, avec $\mathcal{N}$ le noyau de $I - T$). Alors $y_n = (I - T)z_n$.

Montrons par l'absurde que (z_n) est bornée. Sinon, il existe une sous-suite $(z_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $\|z_{n_k}\| \rightarrow \infty$. On pose alors

$$u_k := \frac{z_{n_k}}{\|z_{n_k}\|}.$$

Alors $\|u_k\| = 1$ et

$$(I - T)u_k = \frac{y_{n_k}}{\|z_{n_k}\|} \rightarrow 0.$$

Comme T est compact, il existe $(u_{k_\ell})_{\ell \geq 1}$ sous-suite telle que $Tu_{k_\ell} \rightarrow v \in \mathcal{H}$. Alors

$$u_{k_\ell} = (I - T)u_{k_\ell} + Tu_{k_\ell} \rightarrow v.$$

Ainsi, $(I - T)v = 0$, donc $v \in \mathcal{N}$. Or $v \in \mathcal{N}^\perp$, car $\mathcal{N}^\perp$ est fermé. Donc $v = 0$. Contradiction avec $\|v\| = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u_{k_\ell}\| = 1$.

Comme (z_n) est bornée, il existe (z_{n_k}) sous-suite telle que $Tz_{n_k} \rightarrow w \in \mathcal{H}$. Alors

$$z_{n_k} = (I - T)z_{n_k} + Tz_{n_k} \rightarrow y + w =: z.$$

On a alors $y = \lim (I - T)z_{n_k} = (I - T)z$, donc $y \in \mathcal{F}$.

On a donc $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, donc $\mathcal{N}_*^\perp \subset \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{N}_*^\perp$. □

Dans la suite, on suppose que T est auto-adjoint et compact.

Corollaire 12.0.3. Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre et $\mathcal{N}(T_\lambda)$ est de dimension finie.

Démonstration. Si $\lambda \neq 0$, alors $T_\lambda = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$. On applique l'alternative de Fredholm à $I - \lambda^{-1}T$. □

Proposition 12.0.4. Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Alors λ est isolée, i.e. il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\cap \sigma_p(T) = \{\lambda\}.$$

Démonstration. Par l'absurde. Sinon, pour tout $n \geq 1$, il existe λ_n une valeur propre de T telle que $\lambda_n \neq \lambda$ et $|\lambda_n - \lambda| < 1/n$. On fixe $x_n \in \mathcal{N}(T_{\lambda_n})$ avec $\|x_n\| = 1$. Par compacité de T , il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $Tx_{n_k} \rightarrow y \in \mathcal{H}$. Alors

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda_{n_k}}Tx_{n_k} \rightarrow \frac{1}{\lambda}y =: x.$$

On a, par continuité, $\|x\| = 1$ et $Tx = \lambda x$. Mais pour tout k , $\lambda_{n_k} \neq \lambda$, donc $\langle x_{n_k}, x \rangle = 0$. En faisant $k \rightarrow \infty$, $\|x\|^2 = 0$, contradiction. □

Corollaire 12.0.5. L'ensemble $\sigma(T)$ est fini ou dénombrable et son seul point d'accumulation possible est 0.

Théorème 12.0.6 (Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts). On suppose toujours que T est auto-adjoint et compact. On suppose de plus que $\mathcal{H}$ est de dimension infinie. Alors une des assertions suivantes est vérifiée.

1. Il existe un entier N tel que

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{N}(T_{\lambda_N}).$$

2. Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ telle que $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n; n \geq 1\}$ et

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\text{Vect} \left(\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{N}(T_{\lambda_n}) \right)}.$$

Remarques 12.0.7.

1. Dans le cas (1), $T(\mathcal{H})$ est de dimension finie, égale à

$$\dim(\mathcal{N}(T_{\lambda_1})) + \dots + \dim(\mathcal{N}(T_{\lambda_N})),$$

(donc T est un opérateur de rang fini) et $\mathcal{N}(T)$ est de dimension infinie.

Dans le cas (2), $T(\mathcal{H})$ est de dimension infinie et $\mathcal{N}(T)$ peut être de dimension finie (on peut même avoir $\mathcal{N}(T) = \{0\}$) ou infinie.

2. Si $\mathcal{H}$ est séparable, le théorème implique qu'il existe une base hilbertienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{H}$ constituée de vecteurs propres de T . On prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{n=1}^N \mathcal{B}_n$ (cas (1)) ou $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$ (cas (2)), avec $\mathcal{B}_0$ une base hilbertienne de $\mathcal{N}(T)$, finie ou infinie, et $\mathcal{B}_n$ une base orthonormée finie de $\mathcal{N}(T_{\lambda_n})$.

Démonstration du théorème 12.0.6.

Remarque préliminaire : Soit Y un sous-espace vectoriel stable par T , i.e. $T(Y) \subset Y$. Alors $Y^\perp$ est aussi stable par T : $T(Y^\perp) \subset Y^\perp$. Supposons en effet que $x \in Y^\perp$ et $y \in Y$. Alors $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$, car $Ty \in Y$. Donc $Tx \in Y^\perp$.

On pose $\mathcal{G} := \mathcal{N}(T)^\perp$. C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, donc un espace de Hilbert. Comme $\mathcal{N}(T)$ est stable par T , $\mathcal{G}$ est stable par T . On note

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ x &\mapsto Tx. \end{aligned}$$

Par le critère des suites, $\hat{T}$ est compact. Par construction, $\mathcal{N}(\hat{T}) = \{0\}$ et

$$\mathcal{N}(\hat{T}_\lambda) = \mathcal{N}(T_\lambda)$$

pour tout $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Posons $\Lambda := \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Alors $\sigma_p(\hat{T}) \setminus \{0\} = \Lambda$. Posons $\mathcal{F} := \overline{V}$, avec

$$V := \text{Vect} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{N}(\hat{T}_\lambda) \right) \subset \mathcal{G}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{F}^\perp = \{0\}$ dans $\mathcal{G}$.

Par l'absurde, supposons que $\mathcal{E}_0 := \mathcal{F}^\perp \cap \mathcal{G} \neq \{0\}$. V est stable par T , donc d'après la remarque initiale, $\mathcal{F}^\perp = V^\perp$ aussi, donc $\mathcal{E}_0$ aussi. Posons

$$\begin{aligned} \hat{T}_0 : \mathcal{E}_0 &\rightarrow \mathcal{E}_0 \\ x &\mapsto Tx. \end{aligned}$$

$\hat{T}_0$ est une restriction de $\hat{T}$, qui est injectif, donc $\hat{T}_0$ est injectif, donc $\|\hat{T}_0\| > 0$. Or $\|\hat{T}_0\| \in \sigma(\hat{T}_0)$ ou $-\|\hat{T}_0\| \in \sigma(\hat{T}_0)$ (voir la proposition 11.2.7 et la remarque qui suit). Ainsi, il existe $\lambda \in \sigma(\hat{T}_0) \setminus \{0\}$. $\hat{T}_0$ est compact (critère des suites), donc λ est une valeur propre, donc il existe $x \in \mathcal{E}_0 \setminus \{0\}$ vecteur propre associé. Alors $\lambda \in \Lambda$, donc $x \in \mathcal{N}(\hat{T}_\lambda) \subset \mathcal{F}$, donc $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 0$, contradiction. Ainsi $\mathcal{E}_0 = \{0\}$. $\square$