

# Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP\*

*exercices et problèmes non corrigés  
pour la préparation des concours*

Gaëtan BISSON  
*ancien élève de l'École normale supérieure  
agrégé de mathématiques*

# Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP\*

Gaëtan BISSON

Colles de mathématiques en classes de MPSI & MP\*

Copyright © 2006–2009, Gaëtan BISSON

---

Permission vous est donnée de copier, distribuer et/ou modifier le contenu de ce document selon les termes de la licence *Creative Commons Attribution-Share Alike*, version 2.0 :

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/>

Site Web de l'auteur :

<http://www.normalesup.org/~bisson/>

# Préface

## Qu'est-ce ?

Ce document est l'aboutissement du travail de préparation des colles que j'ai assurées pendant l'année 2005–2006 en classes préparatoires MPSI et MP\*. Il s'agit d'énoncés de problèmes mathématiques pour la plupart donnés lors de ces colles ; tous n'ont toutefois pas été « testés » et il se peut que, malgré mon attention, quelques coquilles demeurent.

Seuls sont proposés ici les exercices que je trouve utile de poser en colle ; en particulier, il n'y a pas d'exercice de calcul. Le calcul est certes indispensable à un élève de classe préparatoire, mais il trouvera plus sa place en travaux dirigés ou à la maison ; en colles, on y préférera les problèmes visant à développer la compréhension et l'intuition des élèves, mettant ainsi à profit la présence du colleur.

## Prérequis

La connaissance du cours est indispensable ; elle est, de toute façon, la moindre des choses qu'on peut attendre d'un candidat aux concours.

Malgré mes efforts pour ordonnancer le contenu de ce recueil, c'est à dire faire en sorte qu'un exercice ne fasse appel qu'aux connaissances des chapitres qui le précèdent, cela n'a pas toujours été possible et cette règle admet ainsi quelques exceptions.

Parfois, pour résoudre un problème, on pourra faire appel à des résultats obtenus par le biais d'autres exercices, en particulier ceux qui se trouvent dans la liste des résultats : y sont répertoriés les résultats classiques ou importants qui font partie de la culture mathématique qu'il est souhaitable de posséder à l'issue des classes préparatoires. Il va sans dire que j'invite tout élève à la consulter et à s'assurer, avant les concours, de sa compréhension des résultats qui y sont répertoriés.

## Remerciements

Ma première pensée va tout naturellement à mes maîtres de classes préparatoires, Jérôme ISAÏA et Henri KOEN, qui m'ont enseigné de façons si différentes les mathématiques ; je leur en suis très reconnaissant. On pourra par ailleurs remarquer l'influence qu'ils ont eu sur certaines parties de ce travail.

L'inspiration m'est par ailleurs venue de Sébastien GOUËZEL, alors qu'il était caïman de géométrie différentielle à l'ÉNS, dont les travaux dirigés et les colles foisonnent de problèmes plaisants et enrichissants. Je me dois aussi de saluer Marc SAGE et, à travers lui, toutes les personnes que je fréquentais en première année d'école, lors de la rédaction de cet ouvrage, avec lesquelles j'ai eu de si nombreux échanges et discussions, mathématiques ou non.

Alexis MUSEUX, que j'ai eu le plaisir d'avoir comme colleur pendant mes deux années en classes préparatoires, m'a quant à lui transmis cette façon si agréable d'envisager les colles qui lui est propre, même si cela transparait difficilement dans le présent document.

Enfin, je ne pourrais trop remercier Michel COGNET et Jérôme DÉGOT qui m'ont permis de coller dans leurs classes, en MPSI au lycée Louis-le-Grand et en MP\* au lycée Chaptal.

À tous, un grand merci.

G. BISSON  
Paris, juin 2006  
Nancy, mai 2009

## Notations usuelles

$f: X \hookrightarrow Y$	la fonction $f$ est injective
$f: X \twoheadrightarrow Y$	la fonction $f$ est surjective
$\mathfrak{P}(E)$	l'ensemble des parties de l'ensemble $E$
$\mathcal{F}(X, Y)$	l'ensemble des fonctions de $X$ dans $Y$
$[x]$	la partie entière du réel $x$
$v_p(n)$	la valuation $p$ -adique de $n$
$C_n^k$	le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ »
$\delta_i^j$	le symbole de Kronecker
$\mathfrak{S}_n$	le $n^{\text{e}}$ groupe symétrique
$\mathfrak{A}_n$	le $n^{\text{e}}$ groupe alterné
$\mathbb{K}_n[X]$	les polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	l'algèbre des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$	le groupe linéaire de degré $n$ sur $\mathbb{K}$
${}^tM$	la transposée de la matrice $M$
$\mathbb{I}$	le segment $[0; 1]$ (à homéomorphisme près)
$\mathbb{B}^k$	la boule unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$
$\mathbb{S}^k$	la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{k+1}$ , c'est-à-dire $\partial\mathbb{B}^{k+1}$



# Liste des résultats

1.1	Prolongements d'un ordre partiel . . . . .	1
1.1	Théorème de Cantor-Bernstein . . . . .	1
1.1	Formule du crible . . . . .	2
1.2	Théorème chinois pour les groupes abéliens finis . . . . .	2
1.2	Inversion de Möbius . . . . .	3
1.3	Morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^\times$ . . . . .	4
1.3	Critère de conjugaison des permutations . . . . .	4
1.4	Théorème de Wilson . . . . .	5
1.4	Dénombrement des fonctions croissantes . . . . .	5
1.5	Valeurs premières d'un polynôme . . . . .	6
1.5	Cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps commutatif . . . . .	6
1.5	Quasi-surjectivité des fonctions rationnelles . . . . .	7
1.6	Continuité des racines d'un polynôme . . . . .	7
1.6	Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}$ . . . . .	8
2.1	Fonctions à variations bornées . . . . .	10
2.2	Cesàro en version continue . . . . .	10
2.3	Inégalités de Kronecker . . . . .	11
2.3	Théorème de Darboux . . . . .	11
2.4	Utilisation du théorème de Cesàro pour les suites itérées . . . . .	11
2.4	Formule de Faulhaber . . . . .	11
2.5	Moyennes d'une fonction réelle . . . . .	12
2.5	Inégalité de Jensen . . . . .	12
2.6	Lemme de Lebesgue . . . . .	12
2.6	Irrationalité de $\pi$ . . . . .	13
2.7	Lemme de Gronwall . . . . .	13
2.7	Zéros d'une base de solutions d'une équation différentielle ordinaire . . . . .	14
3.1	Union finie de sous-espaces stricts . . . . .	15
3.1	Indépendance linéaire des caractères . . . . .	15

3.2	Somme de deux projecteurs	16
3.3	Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	16
3.3	Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	17
3.3	Disques de Gerschgorin	17
3.3	Tout hyperplan contient une matrice inversible	17
3.4	Résultant de deux polynômes	18
3.4	Indépendance de familles de fonctions réelles	18
3.5	Endomorphismes laissant stable tous les hyperplans	19
4.1	Espace normaux et lemme d'Urysohn	21
4.2	Compactification d'Alexandroff	22
4.4	Théorème de Banach-Steinhaus	23
5.3	Série des inverses des nombres premiers	25
5.3	Permutations d'une série semi-convergente	26
5.4	Théorème de Dini	26
5.5	Fractions rationnelles et suites récurrentes	27
5.5	Théorème de Liouville	27
5.5	Calcul de l'intégrale Gaussienne	28
5.6	Les fonctions holomorphes sont développables en série entière	28
5.6	Fonction $\zeta$ de Riemann et nombres de Bernoulli	29
6.1	Calcul fonctionnel en dimension finie	31
6.2	Décomposition de Jordan	32
6.4	La décomposition polaire est un homéomorphisme	33
6.5	Sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$	34
8.1	Polynômes orthogonaux	39
8.1	Matrices de Gram et inégalité d'Hadamard	39
8.2	Déterminant des matrices antisymétriques	41
8.4	Diagonalisation en base orthonormée des endomorphismes normaux	41
A.0	Transcendance de $e$	43
A.0	Théorème de Brouwer	44

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>i</b>
Qu'est-ce ? . . . . .	i
Prérequis . . . . .	i
Remerciements . . . . .	ii
<b>Notations usuelles</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des résultats</b>	<b>v</b>
<b>1 Concepts algébriques fondamentaux</b>	<b>1</b>
1.1 Logique élémentaire . . . . .	1
1.2 Structures algébriques fondamentales . . . . .	2
1.3 Le groupe symétrique . . . . .	4
1.4 Arithmétique, combinatoire et dénombrement . . . . .	5
1.5 Polynômes et fractions rationnelles . . . . .	6
1.6 Topologie élémentaire . . . . .	7
<b>2 Analyse des fonctions réelles</b>	<b>9</b>
2.1 Continuité . . . . .	9
2.2 Relations de comparaison . . . . .	10
2.3 Dérivabilité . . . . .	11
2.4 Développements limités . . . . .	11
2.5 Convexité . . . . .	12
2.6 Intégration . . . . .	12
2.7 Équations différentielles ordinaires . . . . .	13
<b>3 Algèbre linéaire élémentaire</b>	<b>15</b>
3.1 Espaces vectoriels . . . . .	15

3.2	Applications linéaires . . . . .	16
3.3	Algèbre matriciel . . . . .	16
3.4	Déterminants . . . . .	18
3.5	Dualité . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Quelques notions topologiques</b>	<b>21</b>
4.1	Topologie générale . . . . .	21
4.2	Compacité . . . . .	22
4.3	Connexité . . . . .	22
4.4	Théorie de Baire . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Convergence des suites et séries</b>	<b>25</b>
5.1	Espaces vectoriels normés . . . . .	25
5.2	Familles sommables . . . . .	25
5.3	Séries numériques . . . . .	25
5.4	Suites et séries de fonctions . . . . .	26
5.5	Séries entières . . . . .	27
5.6	Séries de Fourier . . . . .	28
5.7	Intégrales à paramètre . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>31</b>
6.1	Polynômes d'endomorphismes . . . . .	31
6.2	Valeurs propres et espaces caractéristiques . . . . .	32
6.3	Diagonalisabilité et trigonalisabilité . . . . .	32
6.4	Topologie de l'algèbre des matrices . . . . .	33
6.5	Exponentiation matricielle . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Calcul différentiel élémentaire</b>	<b>35</b>
7.1	Différentiabilité . . . . .	35
7.2	Équations aux dérivées partielles . . . . .	36
7.3	Problèmes d'extrémums . . . . .	36
7.4	Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites . . . . .	36
7.5	Intégrales multiples . . . . .	37
<b>8</b>	<b>Algèbre euclidienne et hermitienne</b>	<b>39</b>
8.1	Espaces euclidiens et hermitiens . . . . .	39
8.2	Formes quadratiques et hermitiennes . . . . .	41
8.3	Endomorphismes orthogonaux et unitaires . . . . .	41
8.4	Endomorphismes autoadjoints et normaux . . . . .	41

**A Exercices et problèmes de révision**

**43**



# Concepts algébriques fondamentaux

## 1.1 Logique élémentaire

### *Injectivité des fonctions des parties*

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $X$  dans un ensemble  $Y$ .

On définit  $f_* : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$  et  $f^* : \mathfrak{P}(Y) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  par  $f_*(x) = \{f(x)\}$  et  $f^*(y) = \{x : f(x) \in y\}$ .

À quelle condition sur  $f$  l'application  $f_*$  (resp.  $f^*$ ) est-elle injective ? Surjective ?

### *Caractérisation ordinale de l'identité sur $\mathbb{N}^*$*

Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une fonction vérifiant  $f(n+1) > f(f(n))$  pour tout  $n$ .

Montrer que  $f = \text{id}$ .

INDICATION. Montrer par récurrence sur  $n$  que  $f(m) \leq n \Rightarrow m \leq n$ .

### *Prolongements d'un ordre partiel*

Montrer que tout ordre partiel peut se prolonger en un ordre total.

On pourra commencer par le cas où l'ensemble sous-jacent est fini.

### *Théorème de Cantor-Bernstein*

Soient  $f : X \hookrightarrow Y$  et  $g : Y \hookrightarrow X$  deux applications injectives.

Construire à partir de  $f$  et  $g$  une bijection entre  $X$  et  $Y$ .

INDICATION. Considérer les suites définies par  $X_0 = X \setminus g(Y)$ ,  $X_{k+1} = g(Y_k)$  et  $Y_k = f(X_k)$ ; voir que  $f$  est une bijection de  $\bigcup X_k$  sur  $\bigcup Y_k$ .

**Formule du crible**

Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille finie de parties d'un ensemble fini  $X$ .  
 Montrer que  $\text{card} \bigcup_{i \in I} X_i = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{1+\text{card} J} \text{card} \bigcap_{j \in J} X_j$ .

INDICATION. On pourra raisonner à l'aide de fonctions caractéristiques.

**Caractérisation fonctionnelle des ensembles infinis**

Montrer qu'un ensemble est infini si et seulement si, pour toute application de lui-même dans lui-même, il admet une partie stable autre que l'ensemble vide et lui-même.

**Quelques exemples en dénombrabilité**

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur  $\mathbb{Q}$  (i.e. nombres complexes racines de polynômes à coefficients rationnels) est dénombrable.  
 L'ensemble des bijections de  $\mathbb{N}$  sur lui-même est-il dénombrable ?

**1.2 Structures algébriques fondamentales****Théorème chinois pour les groupes abéliens finis**

Considérons  $G$  un groupe abélien fini et décomposons son ordre  $n$  en facteurs premiers :  $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ . On pose  $G_i = \text{im}(x \mapsto x^{n/p_i^{\alpha_i}})$ .  
 Montrer que  $G$  est isomorphe à  $\prod G_i$  et que  $\text{card} G_i = p_i^{\alpha_i}$ .

INDICATION. Le théorème de Bézout donne des entiers  $u_i$  tels que  $\sum u_i n / p_i^{\alpha_i} = 1$  ; regarder le morphisme  $x \mapsto (x^{u_i n / p_i^{\alpha_i}})$  de  $G$  dans  $\prod G_i$ .

**Groupe de Prüfer**

Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que  $\{z \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}^\times$  qui n'est pas isomorphe au produit de deux groupes non nuls.

INDICATION. Montrer que ses sous-groupes stricts sont monogènes.

**Groupe diédral**

Montrer que le groupe des isométries du plan laissant stable un polygone régulier à  $n$  côtés ne dépend pas (à isomorphisme près) du polygone choisi.  
 Quel est son cardinal ? Quels en sont les sous-groupes ?

**Sous-groupes finis de  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$  et quotients**

Considérons le groupe  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ ; il s'identifie au groupe des racines de l'unité.

Quels en sont les sous-groupes finis ?

Montrer qu'il est isomorphe à son quotient par tout sous-groupe fini.

Faire de même pour le sous-groupe formé des éléments dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier donné.

**Inversion de Möbius**

Munissons l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{C}$  de l'addition usuelle ainsi que du produit défini par  $f \star g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ ; montrer que cela constitue un anneau commutatif.

Donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité.

Notons  $\mu$  la fonction associant 0 aux multiples de carrés et  $(-1)^r$  à tout entier de la forme  $p_1 \cdots p_r$  (où les  $p_k$  sont premiers et distincts). Calculer  $\mu \star (n \mapsto 1)$ .

En déduire que, si  $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$ , alors  $g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})f(d)$ .

**Somme des puissances dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$** 

Soit  $p$  un nombre premier et  $k$  un entier naturel.

Que vaut la somme  $\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} x^k$  ?

**Somme d'un élément nilpotent et d'un élément inversible commutant**

On se place dans un anneau quelconque.

Montrer que la somme d'un élément nilpotent et d'un élément inversible qui commute avec lui (en particulier, l'unité) est inversible.

**Anneaux connexes**

Montrer qu'un anneau dont tous les éléments sont idempotents est commutatif.

Montrer qu'un anneau commutatif non nul possède au moins deux idempotents et qu'il en possède exactement deux si et seulement s'il n'est pas isomorphe au produit de deux anneaux non nuls.

**Critère d'isomorphisme d'extensions quadratiques de  $\mathbb{Q}$** 

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux entiers non nuls.

Montrer que les corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$  et  $\mathbb{Q}(\sqrt{\beta})$  sont isomorphes si et seulement si  $\sqrt{\alpha\beta}$  est un nombre entier.

### 1.3 Le groupe symétrique

#### *Morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^\times$*

Trouver tous les morphismes de groupes de  $\mathfrak{S}_n$  dans  $\mathbb{C}^\times$ .

INDICATION. Montrer à l'aide de conjugaisons que toutes les transpositions ont même image par un tel morphisme.

#### *Centre de $\mathfrak{A}_n$*

Déterminer le centre (i.e.  $\{x : \forall y, xy = yx\}$ ) du groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$ , pour  $n \leq 3$ .

Faire de même pour  $n \geq 4$ .

INDICATION. Montrer qu'une permutation du centre de  $\mathfrak{A}_n$  laisse stable toutes les parties à trois éléments.

#### *Critère de conjugaison des permutations*

Montrer que deux permutations d'un ensemble fini sont conjuguées si et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , elles ont le même nombre d'orbites de cardinal  $k$ .

#### *Nombre moyen de points fixes des permutations*

Quel est le nombre moyen de points fixes des permutations de  $\mathfrak{S}_n$  ?

INDICATION. Notant  $d_n^k$  le nombre de permutations de  $\mathfrak{S}_n$  à  $k$  points fixes, on a  $kd_n^k = k C_n^k d_{n-k}^0 = n C_{n-1}^{k-1} d_{(n-1)-(k-1)}^0 = n d_{n-1}^{k-1}$ ; puis, il suffit de sommer.

#### *Nombre de dérangements*

Quel est le nombre de dérangements (i.e. de permutations sans points fixes) d'un ensemble à  $n$  éléments ?

INDICATION. Notant  $d_n$  ce nombre, montrer que  $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$  puis trouver  $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$ . On peut aussi appliquer la formule du crible aux ensembles  $\{\sigma : \sigma(k) = k\}$  pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

## 1.4 Arithmétique, combinatoire et dénombrement

### Formule de Legendre

Soient  $n$  un entier naturel et  $p$  un nombre premier.

Montrer que la valuation de  $n!$  en  $p$  vaut  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \lfloor n/p^k \rfloor$ .

En déduire par combien de zéros l'écriture décimale du nombre  $10^n!$  se termine.

### Diviseurs communs dans la suite de Fibonacci

Notons  $(\phi_n)$  la suite de Fibonacci définie par  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi_1 = 1$  et  $\phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$ .

Montrer que  $\text{pgcd}\{\phi_m, \phi_n\} = \phi_{\text{pgcd}\{m, n\}}$ .

INDICATION. Montrer par récurrence sur  $m$  que  $\phi_{n+m} = \phi_m \phi_{n+1} + \phi_{m-1} \phi_n$  et remarquant que  $\text{pgcd}\{\phi_{n+1}, \phi_n\} = 1$ , déduire  $\text{pgcd}\{\phi_{kn+r}, \phi_n\} = \text{pgcd}\{\phi_r, \phi_n\}$ .

### Nombres parfaits et nombres de Mersenne

Soit  $\sigma$  la fonction qui associe à un entier la somme de ses diviseurs, e.g.  $\sigma(4) = 7$ .

Montrer que si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux alors  $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ .

En déduire que les entiers pairs  $n$  vérifiant  $\sigma(n) = 2n$  sont exactement ceux de la forme  $2^{k-1}(2^k - 1)$  où  $2^k - 1$  premier. Dans un tel cas, prouver que  $k$  premier.

### Théorème de Wilson

Montrer qu'un entier  $p$  est premier si et seulement si  $(p-1)! = -1 \pmod p$ .

### Dénombrement dans un produit de groupes cycliques

Soit  $p$  un nombre premier et  $m$  et  $n$  deux entiers.

On considère le groupe  $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^m \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ .

Combien a-t-il d'éléments d'ordre  $p$ ? Et d'ordre  $p^2$ ?

Combien a-t-il de sous-groupes cycliques d'ordre  $p^2$ ?

Et de sous-groupes non-cycliques (d'ordre  $p^2$ )?

INDICATION. On doit trouver très exactement  $p^{m+n-1} \frac{p^m-1}{p-1}$  sous-groupes cycliques et  $\frac{p^{m+n}-1}{p^2-1} \frac{p^{m+n-1}-1}{p-1}$  sous-groupes non-cycliques.

### Dénombrement des fonctions croissantes

Soient  $n$  et  $m$  deux entiers.

Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\{1, \dots, m\}$ ?

Et de fonctions croissantes (au sens large)?

**Nombre de relations d'équivalence sur un ensemble fini**

Montrer que le nombre  $R_n$  de relations d'équivalence sur un ensemble à  $n$  éléments vérifie la relation de récurrence  $R_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} R_k$ .

**1.5 Polynômes et fractions rationnelles****Valeurs premières d'un polynôme**

Montrer qu'aucun polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  non constant ne prend, en des entiers consécutifs, une infinité de valeurs premières.

Voir qu'on peut en fait supposer  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

INDICATION. Montrer que  $P(n + kP(n))$  est divisible par  $P(n)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps commutatif**

Notons  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler.

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$ .

En déduire que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique.

INDICATION. On utilisera le fait que le polynôme  $X^k - 1$  a au plus  $k$  racines.

**Irréductibilité de polynômes augmentés**

Soit  $(x_i)$  une famille finie d'entiers distincts.

Montrer que le polynôme  $\prod (X - x_i) - 1$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$ .

INDICATION. Commencer par montrer qu'il l'est sur  $\mathbb{Z}[X]$ ; supposer pour cela  $P = QR$  et trouver des zéros de  $Q + R$ .

**Automorphismes de  $\mathbb{K}[X]$** 

Déterminer tous les automorphismes de l'algèbre  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}$  étant un corps quelconque.

**Polynômes de Hilbert**

Soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ .

Quel est son noyau ? Son image ?

Soit  $H_k(X)$  le polynôme  $\frac{1}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1)$ .

Montrer que  $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\Delta^k P)(0) H_k(X)$ , quelque soit le polynôme  $P(X)$ .

En déduire une méthode pour calculer  $\sum_{k=0}^n P(k)$ .

**Quasi-surjectivité des fonctions rationnelles**

Soit  $R$  une fonction rationnelle non constante à coefficients complexes.

Montrer que tous les nombres complexes sauf peut-être un sont dans son image.

À quelle condition  $R$  est-elle bijective ?

INDICATION. Si  $R = P/Q$  et  $\lambda \notin \text{im } R$ , le polynôme  $P - \lambda Q$  n'a pas de racines.

**Localisation des racines d'un polynôme à coefficients de signes fixés**

Soit  $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  un polynôme vérifiant  $(a_k) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$  et  $a_0 \in \mathbb{R}_+^\times$ .

Montrer qu'il admet un unique zéro,  $\rho$ , sur  $\mathbb{R}_+^\times$  (considérer  $P(X)/X^{n-1}$ ).

Prouver que tous ses zéros (complexes) sont de module inférieur à  $\rho$ .

Établir que  $\rho \leq \max(1, \sum a_k)$  et que  $\rho < 1 + \max a_k$ .

**1.6 Topologie élémentaire****Continuité des racines d'un polynôme**

Munissons  $\mathbb{C}_n[X]$  de la topologie produit, qui découle de son identification à  $\mathbb{C}^{n+1}$  par les coefficients.

Montrer la continuité de l'application qui à un couple de polynômes associe le reste de la division euclidienne du premier par le second.

En déduire que si une suite de polynômes  $(P_k(X))$  admet une limite qui s'écrit  $\mu \prod (X - \lambda^i)$ , alors, à partir d'un certain rang, on peut écrire  $P_k(X) = \mu_k \prod (X - \lambda_k^i)$  de sorte que  $\lambda_k^i \rightarrow \lambda^i$  pour tout  $i$  et  $\mu_k \rightarrow \mu$ .

**Morphismes des suites convergentes à valeur dans  $\mathbb{Z}$** 

Déterminer tous les morphismes de l'anneau des suites convergentes d'entiers relatifs dans  $\mathbb{Z}$ .

**Valeurs d'adhérence d'une suite qui ralentit**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle vérifiant  $\lim u_{n+1} - u_n = 0$ .

Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

Montrer que la suite  $(\sin(\ln n))$  est dense dans  $[-1; 1]$ .

Qu'en est-il de la suite  $(n^{1/3} \cos(\pi \sqrt{n}))$  ?

**Sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}$** 

Montrer que tous les sous-groupes discrets de  $\mathbb{R}$  sont de la forme  $x\mathbb{Z}$  (pour  $x \in \mathbb{R}$ ).

En déduire que,  $p$  étant un entier non carré, la suite  $(n\sqrt{p} \bmod 1)$  est dense dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

INDICATION. Le sous-groupe engendré par  $\sqrt{p}$  et 1 n'est pas monogène.

**Théorème de Beatty**

On appelle densité d'une partie  $X$  de  $\mathbb{N}^*$  la limite, lorsque  $n$  tend vers l'infini, de la quantité  $\text{card}(X \cap \{1, \dots, n\})/n$ .

Toutes les parties de  $\mathbb{N}^*$  admettent-elles une densité ? Montrer que la densité de l'union de deux parties disjointes est la somme de leurs densités.

Quelle est, en fonction de  $\gamma \in \mathbb{R}$ , la densité de l'ensemble  $X_\gamma = \{\lfloor n\gamma \rfloor : n \in \mathbb{N}^*\}$  ?

En déduire que  $X_\gamma$  et  $X_z$  partitionnent  $\mathbb{N}^*$  si et seulement si  $\gamma$  et  $z$  sont des irrationnels dont la somme des inverses vaut l'unité.

**Dérivation topologique**

Quelle est l'image et quels sont les points fixes de l'opérateur qui à une partie de  $\mathbb{R}$  associe l'ensemble de ses points d'accumulation ?

**Partitions en connexes dans  $\mathbb{R}$** 

Montrer que tout ouvert de  $\mathbb{R}$  s'écrit de façon unique comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

A-t-on une décomposition similaire avec des intervalles fermés ?

# Analyse des fonctions réelles

En l'absence d'indication contraire, les fonctions considérées ici seront supposées réelles d'une variable réelle.

## 2.1 Continuité

### *Version discrète du lemme de Lebesgue*

Soit  $f$  une fonction continue.

Que dire, lorsque l'entier  $n$  tend vers l'infini, de la quantité  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$  ?

### *Fonctions à valeurs pareillement multiples*

Pour quels entiers  $n$  existe-t-il une fonction continue prenant exactement  $n$  fois chaque valeur ?

### *Égalité en des points à une distance fixée*

Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $[0; 1]$ .

On suppose qu'elle prend la même valeur en 0 et en 1.

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$  a une solution.

Et si l'on suppose seulement  $n \in \mathbb{R}^\times$  ?

INDICATION. On pourra considérer la fonction  $x \mapsto x - \frac{\sin^2 n\pi x}{\sin^2 n\pi}$ .

***Valeurs identiques en des points diamétralement opposés***

Soit  $f$  une fonction continue du cercle dans  $\mathbb{R}$ .

Montrer qu'il existe un point en lequel elle prend la même valeur qu'en son opposé.

***Croissance comme substitut de la continuité***

Soit  $f$  une fonction positive en 0 et négative en 1.

On suppose qu'il existe une fonction continue dont la somme avec  $f$  est croissante.

Montrer que  $f$  a un zéro.

***Fonctions à variations bornées***

Pour toute fonction  $f$ , on définit  $\sigma_a^b(f) = \sup\{\sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|\}$ , où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des subdivisions  $(x_i)$  de l'intervalle  $[a; b]$ .

Montrer que  $b \mapsto \sigma_a^b(f)$  et  $b \mapsto \sigma_a^b(f) - f(b)$  sont des fonctions croissantes.

En déduire que l'ensemble des fonctions  $f$  pour lesquelles  $\sigma_a^b(f)$  est fini quelque soit l'intervalle  $[a; b]$  est l'espace vectoriel engendré par les fonctions croissantes.

**2.2 Relations de comparaison*****Construction d'une fonction très rapide***

Soit  $(f_k)$  une suite de fonctions.

Construire une fonction  $g$  telle que, pour tout  $k$ ,  $f_k = o(g)$  en l'infini.

***Équivalence d'exponentielles***

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les fonctions  $f$  et  $g$  pour qu'en l'infini  $e^f$  et  $e^g$  soient équivalents.

***Cesàro en version continue***

Soit  $f$  une fonction continue pour laquelle la quantité  $f(x+1) - f(x)$  admet une limite lorsque  $x$  tend vers l'infini.

Montrer que  $f(x)/x$  tend vers cette même limite.

## 2.3 Dérivabilité

### Inégalités de Kronecker

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[0; 1]$ . On pose  $M_k = \sup |f^{(k)}|$ .

Montrer que  $M_k \leq 2^{\frac{1}{2}k(n-k)} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$ .

INDICATION. On montrera cela pour  $n = 2$  avant de raisonner par récurrence.

### Théorème de Darboux

Montrer que, sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$ , la dérivée de toute fonction dérivable vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

INDICATION. On pourra montrer que l'image par  $f'$  de l'intervalle  $[a; b]$  est recouverte par les images des deux fonctions  $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  et  $x \mapsto \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ .

## 2.4 Développements limités

### Utilisation du théorème de Cesàro pour les suites itérées

Soit  $f$  une fonction qui admet en  $x = 0$  un développement limité de la forme  $f(x) = x - ax^b + o(x^b)$  avec  $a > 0$  et  $b > 1$ .

Lorsque  $u_0$  est positif et suffisamment petit, trouver un équivalent de la suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Voir cela dans le cas  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $f = \sin$  ou  $f = \text{id} \cdot \cos$ .

INDICATION. Trouver  $\alpha$  tel que  $0 \neq \lim(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$  puis penser à Cesàro.

### Formule de Faulhaber

Soit  $B_k$  l'unique fonction telle que, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=0}^n \frac{B_k(x)}{k!} t^k + o(t^n) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$ .

Montrer que  $B_k(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré  $k$ .

On note  $b_k = B_k(0)$ . Montrer que  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k b_k x^{n-k}$ .

Que vaut  $B_k(x+1) - B_k(x)$ ? En déduire une relation de récurrence sur les  $b_k$ .

Montrer enfin la formule  $\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k b_k m^{n+1-k}$ .

## 2.5 Convexité

### *Moyennes d'une fonction réelle*

Soit  $f$  une fonction continue et strictement positive sur  $[a; b]$ .

On définit, pour tout réel  $t$ , la quantité  $M_t(f) = \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^t dx \right)^{1/t}$ .

Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} M_t(f)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t(f)$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} M_t(f)$ .

### *Minimum de fonctions convexes*

Notons  $m(f)$  l'ensemble des points où une fonction convexe  $f$  atteint son minimum.

Montrer que c'est un intervalle et rappeler pourquoi  $f$  est continue.

Soit  $(y_i)$  une famille finie de réels. Pour  $p \in [1; \infty[$ , on définit  $f_p : x \mapsto \sum |x - y_i|^p$ .

Montrer que, si  $p > 1$ ,  $m(f_p)$  est un singleton et le déterminer pour  $p = 2$ .

Que dire de  $m(f_1)$  ?

### *Inégalité de Jensen*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et  $\varphi$  une fonction convexe sur son image.

Montrer que  $\varphi \left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f$ .

## 2.6 Intégration

### *Lemme de Lebesgue*

Soient  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a; b]$  et  $g$  une fonction continue  $T$ -périodique (sur  $\mathbb{R}$ ).

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)g(nt)dt = \left( \frac{1}{T} \int_0^T g \right) \int_a^b f$ .

### *Intégrabilité et uniforme continuité*

Montrer qu'une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  qui ne tend pas vers 0 en l'infini n'est pas uniformément continue.

### *Intégrabilité et uniforme continuité pour une fonction qui tourne*

Montrer que, si  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est uniformément continue, alors l'intégrale  $\int \exp(if)$  ne converge pas en l'infini.

Donner un exemple de fonction pour laquelle ce n'est pas le cas.

**Majoration de l'erreur des méthodes d'intégration numériques**

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Montrer que l'erreur commise par la méthode d'intégration numérique des rectangles, c'est-à-dire  $|\int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})|$ , est majorée par  $\frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{n} \max |f'|$ .

Établir pareillement une majoration de l'erreur de la méthode d'intégration numérique des trapèzes lorsque la fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Irrationalité de  $\pi$** 

Supposons qu'il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $\pi = \frac{a}{b}$ .

Montrer que  $\frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (bx - a)^n \sin(x) dx$  est un nombre entier qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Qu'en déduire ?

**Relation de distribution des polynômes de Bernoulli**

Montrer qu'il existe un unique polynôme,  $B_n(x)$ , vérifiant  $\int_y^{y+1} B_n(x) dx = y^n$ .

Établir que, quelque soit  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m^{n-1} \sum_{r=0}^{m-1} B_n(\frac{r+t}{m}) = B_n(t)$ .

**2.7 Équations différentielles ordinaires****Lemme de Gronwall**

Soit  $\varphi$  une fonction continue positive,  $a$  un réel positif, et  $y$  une fonction réelle.

On suppose que l'inégalité  $y(t) \leq a + \int_0^t y \varphi$  est vérifiée pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Montrer que  $y(t) \leq a \exp \int_0^t \varphi$  l'est alors aussi pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

INDICATION. Majorer la dérivée de la fonction  $t \mapsto (\int_0^t y \varphi) \exp(-\int_0^t \varphi)$  par une dérivée parfaite et écrire que la différence de leurs deux primitives est croissante.

**Asymptotique et dérivations multiples**

Notons  $D$  l'opérateur de dérivation des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , montrer qu'il y a équivalence entre :

- les racines de  $P$  sont toutes de partie réelle strictement négative ;
- pour tout  $f$ , si  $P(D)(f) \rightarrow_\infty 0$ , alors  $f \rightarrow_\infty 0$ .

***Pendule sans frottement***

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on note  $x_\alpha$  la solution maximale du problème différentiel  $x'' = -\sin x$  avec les conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $x'(0) = \alpha$ .

Quel est son ensemble de définition ?

Que dire de la périodicité et de la limite en l'infini de  $x_\alpha$  ?

INDICATION. Voir que la quantité  $x_\alpha^2/2 - \cos x_\alpha$  est constante (qu'est-elle ?).

***Petites oscillations d'un pendule sphérique***

Considérons les petites oscillations d'un pendule dans l'espace usuel.

Notant  $x$  et  $y$  les déviations du pendule suivant les deux axes horizontaux, on a  $\partial_p^2 x = -x$  et  $\partial_p^2 y = -y$ . Transformer ces deux équations du second ordre en quatre équations du premier ordre (à quatre variables).

Montrer que la somme des carrés de ces quatre variables est constante, c'est-à-dire que les trajectoires sont sur des sphères centrées en 0.

Montrer que les trajectoires sont des grands cercles de ces sphères.

Noter toutefois que tous les grands cercles ne sont pas des trajectoires.

***Zéros d'une base de solutions d'une équation différentielle ordinaire***

Soit  $(f, g)$  une base de solutions de l'équation différentielle homogène  $y'' + py' + qy = 0$  où  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues définies sur un intervalle  $I$ .

Montrer que les zéros de  $f$  sont isolés et qu'ils sont entrelacés avec ceux de  $g$ .

INDICATION. On pourra raisonner avec le Wronskien.

***Théorie de Sturm***

Soient  $q_1$  et  $q_2$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  vérifiant  $q_1 \leq q_2$ .

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , notons  $E_i$  le problème différentiel  $y'' + q_i y = 0$  et  $y_i$  l'une de ses solutions.

Considérons  $a$  et  $b$ , deux zéros consécutifs de  $y_1$ .

Montrer que  $y_2$  s'annule sur  $]a; b[$ . Que cela signifie-t-il si  $q_1 = q_2$  ?

Si l'on peut encadrer  $q_1$  ( $0 < m < q_1 < M$ ), encadrer la distance entre deux zéros consécutifs de  $y_1$  ( $\pi/\sqrt{M} \leq b - a \leq \pi/\sqrt{m}$ ).

***Choix d'une base de solutions***

Déterminer les fonctions  $f$  pour lesquelles le problème différentiel  $y'' + y' + fy = 0$  admet une base de solutions de la forme  $(g, g^2)$ .

# Algèbre linéaire élémentaire

En l'absence de précisions, nous travaillerons dans un espace vectoriel arbitraire  $E$  sur un corps fixé  $\mathbb{K}$ .

## 3.1 Espaces vectoriels

### *Formules de Grassmann*

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps fini (de cardinal  $p^n$ ), combien y a-t-il de familles libres à  $r$  éléments ? Et de sous-espaces de dimension  $r$  ?

### *Union finie de sous-espaces stricts*

Montrer qu'en caractéristique zéro un espace vectoriel n'est pas union finie de sous-espaces stricts.

### *Indépendance linéaire des caractères*

Montrer que toute famille de morphismes distincts d'un groupe  $G$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{K}^\times$  d'un corps  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{K}$ -linéairement indépendante.

### 3.2 Applications linéaires

#### *Somme de deux projecteurs*

Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs.

Montrer que  $p + q$  en est un si et seulement si  $p \circ q = q \circ p = 0$ .

Établir qu'alors  $\text{im}(p + q) = \text{im } p \oplus \text{im } q$  et  $\text{ker}(p + q) = \text{ker } p \cap \text{ker } q$ .

#### *Identification d'une somme de projecteurs*

Soit  $(f_i)$  une famille finie d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension  $n$  vérifiant  $\sum f_i = \text{id}$  et  $\sum \text{rg } f_i \leq n$ . Montrer que les  $f_i$  sont des projecteurs.

#### *Supplémentaire stable par un groupe fini d'automorphismes*

Montrer que, si  $F$  est un sous-espace stable par un groupe d'automorphismes de cardinal fini  $r$ , alors il admet un supplémentaire stable par ce groupe.

INDICATION. Si  $p$  est un projecteur sur  $F$ , étudier  $\frac{1}{r} \sum_{g \in G} g p g^{-1}$ .

#### *Adjonction et nilpotence*

On définit l'opérateur  $\text{ad} : f \in \mathcal{L}(E) \mapsto (g \mapsto fg - gf) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ .

Montrer que, si  $f$  est nilpotent,  $\text{ad } f$  l'est aussi.

Déterminer alors son indice de nilpotence en fonction de celui de  $f$ .

INDICATION. Notant  $n$  l'indice de nilpotence de  $f$ , établir que  $f^{(n-1)} \in \text{im}(\text{ad } f)^{(2n-2)}$  et pour cela que, pour tout  $a \in \mathcal{L}(E)$ , il existe  $b \in \mathcal{L}(E)$  vérifiant  $aba = a$ .

#### *Suite exacte*

Soit  $(f_i : X_i \rightarrow X_{i+1})_{i \in \{0, \dots, n\}}$  une suite exacte, c'est-à-dire qui vérifie, pour tout  $i$ ,  $\text{im } f_i = \text{ker } f_{i+1}$  et  $X_0 = X_{n+1} = 0$ . Montrer que  $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \dim X_i = 0$ .

### 3.3 Algèbre matriciel

#### *Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Quels sont les idéaux à droite (resp. à gauche) de l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ?

Et les idéaux bilatères ?

**Caractérisation exotique de l'inversibilité**

Soit  $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  une application non constante.

On suppose de plus que, pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $f(AB) = f(A)f(B)$ .

Montrer qu'une matrice  $M$  est inversible si et seulement si  $f(M) \neq 0$ .

**Formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** 

Montrer que toute forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est de la forme  $M \mapsto \text{tr}(MA)$  pour une matrice  $A$  uniquement déterminée.

Quelles sont les formes linéaires  $f$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $f(AB) = f(BA)$  ?

**Les endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  préservent la trace**

Montrer que si  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif, tout endomorphisme  $\varphi$  de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  préserve la trace, c'est à dire que  $\text{tr} \circ \varphi = \text{tr}$ .

INDICATION. On pourra déterminer les formes linéaires  $\theta$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  pour lesquelles l'égalité  $\theta(AB) = \theta(BA)$  est toujours vérifiée.

**Matrices à diagonale nulle**

On se place dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que :

- Toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
- Toute matrice  $M$  à diagonale nulle est de la forme  $XD - DX$  où  $D$  est diagonale.
- Les matrices de la forme  $XY - YX$  sont exactement celles de trace nulle.

INDICATION. On pourra considérer  $X = (M_{i,j}/(i-j))$  et  $D = (i\delta_{i,j})$ .

**Disques de Gerschgorin**

Montrer qu'une matrice  $M$  à diagonale prépondérante, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient  $|M_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |M_{i,j}|$  pour tout  $i$ , est inversible.

En déduire une localisation du spectre d'une matrice dans l'union de  $n$  disques.

**Tout hyperplan contient une matrice inversible**

Montrer que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient au moins une matrice inversible.

### 3.4 Déterminants

#### *Déterminant de sommes*

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que si  $\det(A + X) = \det(B + X)$  pour tout  $X$  alors  $A = B$ .

INDICATION. Commencer par le cas  $B = 0$  et réduire  $A$  en une matrice équivalente.

#### *Déterminant de la transposition*

Quel est le déterminant de l'opérateur de transposition sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

#### *Résultant de deux polynômes*

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes, de degrés respectifs  $p$  et  $q$ .

Écrire la matrice du morphisme  $(U, V) \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] \mapsto UP + QV$ .

À quelle condition est-il inversible ?

En déduire tous les polynômes du type  $X^3 + aX + b$  admettant une racine multiple.

#### *Indépendance de familles de fonctions réelles*

Montrer qu'une famille  $(f_i)$  de  $n$  fonctions réelles est libre si et seulement s'il existe une famille  $(x_i) \in \mathbb{R}^n$  telle que le déterminant de la matrice  $(f_i(x_j))$  soit non nul.

#### *Polynomialité en deux variables*

Soit  $\mathbb{K}$  un corps indénombrable et  $f$  une fonction de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}$  qui est polynomiale en chacune de ses variables (à l'autre fixée). Prouver que  $f$  est polynomiale.

INDICATION. Montrer l'existence de fonctions  $a_i$  telles que  $f(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i(x)y^i$  pour une infinité de  $x$ . Choisir alors  $n$  scalaires distincts, et montrer en résolvant un système linéaire que les  $a_i$  sont polynomiales.

#### *Matrices inversibles à coefficients polynomiaux*

Soit  $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  une application dont toutes les composantes sont polynomiales. Montrer que les composantes de l'application  $z \mapsto M(z)^{-1}$  le sont aussi.

#### *Première ligne des matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$*

À quelle condition un vecteur à  $n$  coefficients entiers peut-il constituer la première colonne d'une matrice de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{Z})$  ?

INDICATION. Utiliser le théorème de Bézout pour montrer que les coefficients doivent être premiers entre eux.

***Signe du déterminant d'une somme de puissances***

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices réelles qui commutent. On suppose en outre le déterminant de leur somme positif. montrer que, pour tout entier positif  $p$ ,  $\det(A^p + B^p) \geq 0$ .

INDICATION. Penser à factoriser  $X^p + Y^p$  dans  $\mathbb{C}[X, Y]$ .

**3.5 Dualité*****Dual de  $c_{00}$*** 

Quel est le dual de l'espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang ?

***Endomorphismes laissant stable tous les hyperplans***

Quels endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie laissent stable tous les hyperplans ?



## Quelques notions topologiques

### 4.1 Topologie générale

#### *Construction de distances topologiquement équivalentes*

Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $\varphi$  une application concave de  $\mathbb{R}_+$  dans lui-même continue en 0 telle que  $\varphi^{-1}\{0\} = \{0\}$ . Montrer que  $\varphi \circ d$  est une distance qui définit la même topologie que  $d$ .

#### *Espace normaux et lemme d'Urysohn*

Un espace topologique est dit normal s'il est séparé et que deux fermés disjoints quelconques sont toujours respectivement contenus dans deux ouverts disjoints.

Dans un tel espace, étant donnés deux fermés disjoints  $F$  et  $G$ , montrer qu'il existe une application réelle continue s'annulant sur  $F$  et valant 1 sur  $G$ ; c'est le lemme d'Urysohn. Montrer réciproquement qu'un espace séparé vérifiant le lemme d'Urysohn est normal. Dédurre que les espaces métriques sont de ce type.

INDICATION. Notant  $U_1$  le complémentaire de  $G$ , prouver l'existence d'un ouvert  $U_{1/2}$  tel que  $F \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_1$ ; itérer afin d'obtenir une famille indexée par les dyadiques.

## 4.2 Compacité

### *Un subtil théorème de point fixe*

Soit  $f$  une fonction continue d'un espace métrique compact dans lui-même telle que  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  pour tous  $x \neq y$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.

### *Compactification d'Alexandroff*

Soit  $E$  un espace topologique localement compact.

Rajoutons un point  $x$  à  $E$  et considérons  $E \cup \{x\}$  munis des ouverts de  $E$  et des complémentaires de compacts de  $E$  dans  $E \cup \{x\}$ .

Montrer que l'espace ainsi construit est compact. Dans le cas  $E = \mathbb{R}$ , quel est-il ?

### *Compactification de Stone-Cech*

Un espace est dit complètement régulier s'il est séparé et qu'il existe, pour tout point extérieur à un fermé, une application réelle continue s'annulant sur ce fermé et valant 1 en ce point.

Soit  $X$  un tel espace. Notons  $\beta X$  l'adhérence de l'image de la fonction qui à  $x \in X$  associe la famille  $(\lambda(x))_{\lambda \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})}$  dans  $\mathbb{I}^{\mathcal{C}(X, \mathbb{I})}$  — c'est un compact.

Montrer que  $X$  est homéomorphe à son image par la fonction considérée.

Montrer que toute fonction continue de  $X$  dans un espace compact se prolonge de façon unique sur  $\beta X$ . C'est le seul espace compact ayant cette propriété.

INDICATION. Montrer que, pour  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , l'application qui à  $(t_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})}$  associe  $(t_{\mu \circ f})_{\mu \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{I})}$  est continue et peut être restreinte à  $\beta X \rightarrow \beta Y$ .

## 4.3 Connexité

### *Topologie lexicographique du carré*

Munissons  $[0; 1]^2$  de la topologie induite par l'ordre lexicographique.

Montrer que cet espace est compact mais pas séparable — et donc pas métrisable.

Montrer qu'il est connexe mais non connexe par arc.

INDICATION. Voir qu'un chemin allant d'un point à un autre passe par tous les points qui sont (pour l'ordre) entre ces deux points.

**Connexité et rationalité dans le plan**

Que dire de la connexité, dans  $\mathbb{R}^2$ , de la partie  $((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$  ?  
Et de la partie  $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$  ?

**Connexité par chemins de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Soit un chemin de classe  $\mathcal{C}^1$  dans  $\mathbb{R}^d$  de dérivée jamais nulle,  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^d)$ .  
Construire une fonction strictement croissante  $h$  de  $\mathbb{I}$  dans lui-même tel que  $\varphi \circ h$  soit continue et injectif.

**4.4 Théorie de Baire****Théorème de Banach-Steinhaus**

Un espace est dit « de Baire » si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. Montrer que c'est le cas des espaces métriques complets, ainsi que des espaces topologiques localement compacts.

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach et considérons une famille  $(l_i)$  d'applications continues de  $\mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $\{l_i(x)\}$  soit borné. Prouver qu'elle est uniformément continue.

**Un résultat anti-Peano**

Montrer qu'aucune des fonctions de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$  n'est surjective.  
Et pour les fonctions de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{I}^2)$  ?



# Convergence des suites et séries

## 5.1 Espaces vectoriels normés

### *L'étude des paraboles au service de la convergence*

Étudier la convergence de la suite de fonctions de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_0 = 1$  et  $f_n : x \mapsto 1 + \int_0^x f_{n-1}(t - t^2) dt$ .

### *Point fixe d'un opérateur défini par une intégrale*

Existe-t-il des fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  bornées telles que  $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1+f(t)^2} dt$  ?

## 5.2 Familles sommables

## 5.3 Séries numériques

### *Série des inverses des nombres premiers*

Quelle est la nature de la série de terme général  $1/p_n$  où  $p_n$  dénote le  $n^{\text{ème}}$  nombre premier ?

INDICATION. On utilisera le fait que  $\log 1/(1 - 1/p) \sim 1/p$ .

**Étude asymptotique de la fonction indicatrice d'Euler**

Étudier les limites inférieure et supérieure de la quantité  $\varphi(n)/n$ .

INDICATION. Considérer  $n = \prod_{k=1}^N p_k$  où  $p_k$  désigne le  $k^{\text{ème}}$  nombre premier.

**Permutations d'une série semi-convergente**

Montrer que si la série de terme général réel  $a_i$  est semi-convergente alors, pour tout réel  $l$ , il existe  $\sigma$  une permutation de  $\mathbb{N}$  telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_{\sigma(n)} = l$ .

**Sommes de séries alternées**

Que vaut la somme de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  ?

On change à présent l'ordre des termes de cette série en alternant  $p$  termes positifs et  $q$  termes négatifs, e.g. pour  $p = 3$  et  $q = 2$  cela donne  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  ; que devient la somme ?

**Sommation dans une fonction continûment dérivable**

Soit  $f: [1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^{\times}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $\lim_{\infty} \frac{f'}{f} = -\infty$ .

Montrer que  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  converge et donner un équivalent du reste.

**5.4 Suites et séries de fonctions****Série de fonctions de terme général  $x \mapsto \frac{1}{n} x^n \sin(nx)$** 

Montrer que la série de fonctions de terme général  $\frac{1}{n} x^n \sin(nx)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  converge uniformément sur  $[-1; 1]$  et a pour somme  $\arctan \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$ .

En déduire que  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ .

**Théorème de Dini**

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions continues d'un espace métrique compact  $X$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge simplement vers une fonction continue  $f$ .

Montrer que la convergence est uniforme.

INDICATION. Considérer les ensembles  $X_n = \{x \in X : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ .

**Développement eulérien de la fonction sinus**

Soit  $P_n(x) = (1 + ix/n)^n - (1 - ix/n)^n$ ; on sait que  $\sin x = \lim P_n(x)/2i$ .

Déterminer quels sont les racines de  $P_{2n}(x)/x$  afin d'en déduire l'égalité  $\sin x/x = \lim \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x^2/(4n^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2n}))$ .

Montrer que la convergence est ici uniforme.

**L'algèbre linéaire au service de l'analyse**

Considérons l'opérateur  $b \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \mapsto (x \mapsto b(\frac{x}{2}) + b(\frac{x+1}{2}))$ .

Montrer que son spectre est inclu dans  $[-2; 2]$ .

En l'appliquant à leur différence (prolongée par continuité), montrer que les fonctions

$f: x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$  et  $g: x \mapsto (\frac{\pi}{\sin \pi x})^2$  sont égales sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**5.5 Séries entières****Rayon de convergence et puissances**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Donner, en fonction de  $k$  et de celui de  $\sum a_n z^n$  (supposé non-nul), les rayons de convergence des séries  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ ,  $\sum a_n^k z^n$ ,  $\sum a_n z^{kn}$  et  $\sum a_{nk} z^n$ .

**Fractions rationnelles et suites récurrentes**

Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ; considérons la série entière  $\sum a_n z^n$ .

Montrer que, s'il existe des nombres  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  tels que, pour tout  $n$ ,  $a_{n+k+1} + \sum_{i=0}^k \lambda_i a_{n+i} = 0$ , alors la série entière est celle d'une fraction rationnelle.

Y a-t-il une réciproque à ce résultat ?

**Théorème de Liouville**

Soit  $f: z \mapsto \sum a_n z^n$  une série entière complexe de rayon de convergence  $\rho$ .

Montrer que, quelque soit  $r < \rho$ ,  $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

Supposant  $\rho = \infty$ , en déduire que si  $f$  est bornée alors elle est constante.

Plus généralement, montrer que si elle est bornée en valeur absolue par un polynôme de degré  $n$  alors c'est elle-même un polynôme de degré  $n$ .

**Nombres de mots bien parenthésés**

Notons  $a_n$  le nombre de bons parenthésages d'un mot de longueur  $n$ , c'est à dire avec  $n-2$  couples de parenthésés.

Montrer la relation de récurrence  $a_{n+1} = \sum_{k=1}^n a_k a_{n+1-k}$ .

Calculer le carré de la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  et en déduire  $a_n$ .

**Pseudo-sommation de Riemann**

Soit  $\varphi$  une fonction décroissante et intégrable de  $\mathcal{C}^0([0; \infty[, \mathbb{R}_+)$ .

Montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} h\varphi(nh)$  existe et en déterminer la valeur.

En déduire un équivalent en  $1^-$  de la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / \sqrt{n}$ .

INDICATION. Poser  $h = -\ln x$  et  $\varphi : t \mapsto e^{-t} / \sqrt{t}$ .

**Calcul de l'intégrale Gaussienne**

Soit  $n$  un entier relatif.

Montrer que pour tout  $x \in [0; n]$  on a  $(1 - x/n)^n \leq e^{-x} \leq (1 + x/n)^{-n}$ .

Posons  $x = t^2$  et intégrons cette inégalité sur  $[0; \sqrt{n}]$ .

En trouvant un équivalent à  $\int_0^{\infty} (1 + u^2)^{-n} du$ , montrer que  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ .

**5.6 Séries de Fourier****De l'annulation des coefficients de Fourier**

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel fermé (pour la norme infinie) et stable par translation de l'espace  $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  des fonctions  $2\pi$ -périodiques. Montrer qu'il est de la forme  $E = \{f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \forall k \in I, c_k(f) = 0\}$  pour un certain  $I \subseteq \mathbb{Z}$ .

INDICATION. Voir que si  $f \in E$  est tel que  $c_0(f) \neq 0$  alors  $(t \mapsto 1) \in E$ , cela en écrivant une somme de Riemann.

**Les fonctions holomorphes sont développables en série entière**

Montrer qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  au sens complexe sur le disque  $D(0, \rho) \subseteq \mathbb{C}$  y est développable en série entière.

INDICATION. En dérivant par rapport à  $r$  la définition de  $c_n(\theta \mapsto f(re^{i\theta}))$ , montrer qu'il s'écrit sous la forme  $d_n r^n$  avec  $d_{n < 0} = 0$ .

**Phénomène de Gibbs**

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique valant  $-1$  sur  $[-\pi; 0[$  et  $1$  sur  $[0; \pi[$ .

Calculer sa série de Fourier.

Étudier les extrema de sa série partielle au voisinage de  $0$ .

**Une inégalité d'optimisation**

Considérons une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ .

Montrer qu'on a  $\int_0^1 f'^2 \geq \pi^2 \int_0^1 f^2$ . Que dire du cas d'égalité ?

INDICATION. Écrire l'égalité de Parseval pour  $g$  et  $g'$ , où  $g$  est la fonction impaire  $2\pi$ -périodique égale à  $x \mapsto f(x/\pi)$  sur  $[0; \pi]$ .

**Fonction  $\zeta$  de Riemann et nombres de Bernoulli**

Notons  $(B_n(x))$  l'unique suite de polynômes vérifiant  $B_0(x) = 1$ ,  $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$  et  $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$ . Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_k(\widehat{B}_n) = -\frac{n!}{(2i\pi k)^n}$  où  $\widehat{B}_n$  est la fonction  $2\pi$ -périodique  $x \mapsto B_n(x/2\pi)$  définie sur  $[0; 2\pi]$ .

Écrire la convergence de la série de Fourier de  $\widehat{B}_{2p}$  en  $x = 0$  pour  $p \geq 1$  et en déduire la valeur de  $\zeta(2p)$ .

**5.7 Intégrales à paramètre****Généralisation des intégrales de Wallis**

Quel est le domaine de définition et la classe de la fonction  $f: x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$  ?

Montrer qu'elle est décroissante et que  $f(x+2) = \frac{x+1}{x+2} f(x)$ .

Étudier la périodicité et la classe de  $g: x \mapsto (x+1)f(x)f(x+1)$ .

Montrer que  $g$  est une constante et en déduire un équivalent de  $f$  en  $\infty$ .

INDICATION. Comme  $g$  est périodique, il suffit de montrer qu'elle admet une limite en  $\infty$ ; utiliser alors l'équivalent de  $f(n)$  donné par les intégrales de Wallis.

**Étude d'une intégrale à paramètre**

Quel est le domaine de définition de la fonction  $g: t \mapsto \int_0^\infty \sin(xt)/(x+x^3) dx$  ?

Montrer qu'elle est lipschitzienne puis bornée. En déterminer la limite en l'infini.

INDICATION. Le lemme de Lebesgue donne  $g \sim \int_0^\varepsilon \sin(xt)/(x+x^3) dx$ , ce qu'on peut ramener à l'intégrale de Dirichlet.

**Calcul de**  $\int_{\mathbb{R}_+} x^\mu / (x^\lambda + 1) dx$

Soient  $s$  et  $n$  deux entiers vérifiant  $n \geq 1$  et  $0 \leq s \leq 2n - 2$ .

Décomposer la fraction rationnelle  $z^s / (z^{2n} + 1)$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}$ .

Utiliser l'égalité  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \sin(\frac{nb}{2}) \sin(a + (n-1)\frac{b}{2}) / \sin(\frac{b}{2})$  pour montrer que

$$\int_0^\infty x^s / (x^{2n} + 1) dx = \frac{\pi}{2n} / \sin((s+1)\frac{\pi}{2n}).$$

En déduire la valeur de  $\int_0^\infty x^s / (x^n + 1) dx$  (pour  $n \geq 2$  et  $0 \leq s \leq n - 2$ ).

Généraliser afin de déterminer, pour  $\lambda \in ]1; \infty[$  et  $\mu \in ]-1; \lambda - 1[$ , la valeur de  $\int_0^\infty x^\mu / (x^\lambda + 1) dx$ ; on pourra commencer par le cas  $\mu = 0$ .

## Réduction des endomorphismes

### 6.1 Polynômes d'endomorphismes

#### *Nullité de la trace des puissances*

Montrer qu'une matrice carrée  $A$  à coefficients réels est nilpotente si et seulement si pour tout entier  $n$  on a  $\text{tr}(A^n) = 0$ .

#### *Calcul fonctionnel en dimension finie*

Soit une fonction  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  et  $x$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Considérons un polynôme  $P$  qui interpole  $f$  en les racines du polynôme minimal  $\prod_{j=1}^m (X - \lambda_j)^{r_j}$  de  $x$ , c'est à dire vérifiant, pour tout  $j$  et  $k \leq r_j - 1$ ,  $P^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j)$ .

Montrer que  $P(x)$  ne dépend pas du choix de  $P$  ; on note cette matrice  $\Psi_x(f)$ .

Vérifier que pour  $f = \exp$  cette construction coïncide avec l'exponentielle matricielle classique.

Montrer que  $\Psi_x$  est un morphisme d'algèbres.

Une matrice nilpotente  $x$  et un entier  $k$  étant donnés, établir l'existence d'une solution  $y$  à l'équation  $(\text{id} + y)^k = \text{id} + x$ .

#### *Adjonction et identité en dimension infinie*

Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes vérifiant  $u \circ v - v \circ u = \text{id}$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  n'ont pas de polynôme minimal et qu'ils sont de rang infini.

## 6.2 Valeurs propres et espaces caractéristiques

### *Valeurs propres communes*

Montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ont  $r$  valeurs propres communes si et seulement si l'équation  $AX = XB$  admet une solution de rang  $r$ .

INDICATION. Si  $AX_i = \lambda_i X_i$  et  ${}^t B Y_i = \lambda_i Y_i$ , poser  $X = \sum_{i=1}^r X_i {}^t Y_i$ .

### *Sous-espaces caractéristiques*

Soit  $M$  une matrice carrée complexe. On pose  $F_\lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \ker(M - \lambda \text{id})^k$ .

Montrer que c'est un sous-espace stable par  $M$  et que le projecteur sur  $F_\lambda$  suivant  $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} F_\mu$  est un polynôme en  $M$ .

### *Décomposition de Jordan*

Soit  $u$  un  $\mathbb{C}^n$ -endomorphisme nilpotent d'ordre  $k$ . Donner la matrice de la restriction de  $u$  au sous-espace  $F$  engendré par un élément  $x$  de  $E \setminus \ker u^{(k-1)}$ .

Soit  $f$  une forme linéaire ne s'annulant pas en  $u^{(k-1)}(x)$ .

Montrer que  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \ker(f \circ u^i)$  et  $F$  sont stables par  $u$  et en somme directe.

En conclure une façon de réduire un  $\mathbb{C}^n$ -endomorphisme.

## 6.3 Diagonalisabilité et trigonalisabilité

### *Diagonalisabilité d'une matrice de petit rang*

À quelle condition sur  $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$  peut-on diagonaliser la matrice ci-dessous ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

### *Diagonalisabilité de la composition*

Donner une condition sur  $u$ , un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , pour que l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  qui à  $v$  associe  $u \circ v$  soit diagonalisable.

**Adjonction et sous-algèbres torales**

Soit  $u$  un endomorphisme diagonalisable d'un espace de dimension finie  $E$ .  
 Prouver que l'endomorphisme  $\text{ad}(u)$  de  $\mathcal{L}(E)$  qui à  $v$  associe  $u \circ v - v \circ u$  est diagonalisable.  
 Préciser ses valeurs propres et les dimensions de ses espaces propres.  
 Montrer qu'une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  formée d'éléments dont l'adjoint est diagonalisable est abélienne.

**6.4 Topologie de l'algèbre des matrices****Compacité et polynômes annulateurs**

Posant  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P \in \mathbb{K}[X]$  pour que l'ensemble des matrices annulées par  $P$  soit compact.  
 Qu'en est-il si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ?

**La décomposition polaire est un homéomorphisme**

Établir la décomposition polaire, c'est à dire prouver la bijectivité de l'application  $(O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}\mathcal{D}\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mapsto OS \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .  
 En utilisant la compacité de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , montrer que c'est un homéomorphisme.

**Propriétés des groupes topologiques**

De quels sous-groupes de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  la matrice identité est-elle un point intérieur ?

INDICATION. Montrer qu'un tel sous-groupe est ouvert puis qu'il est aussi fermé.

**Rang et connexité**

Déterminer les sous-ensembles  $P$  de  $\{0, \dots, n\}$  pour lesquels l'ensemble de matrices  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{rg} M \in P\}$  est connexe par arc.

INDICATION. Si  $\text{rg} M \leq n - 1$ ,  $M$  peut s'écrire  $PJ, Q$  avec  $P, Q \in \mathcal{GL}_n^+(\mathbb{R})$ .

## 6.5 Exponentiation matricielle

### *Sous-groupes à un paramètre de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$*

Quels sont les morphismes de groupes  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  ?  
Et ceux de classe  $\mathcal{C}^0$  ?

INDICATION. On pourra considérer une primitive  $\Gamma$  de  $\gamma$  et montrer que  $\Gamma(t + \varepsilon) - \Gamma(t) = \gamma(t) \int_0^\varepsilon \gamma(s) ds$ .

### *Solutions à norme constante*

Montrer que les solutions d'un problème différentiel du type  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  fixée, ont une norme indépendante du temps si et seulement si  $A$  est antisymétrique.

# Calcul différentiel élémentaire

## 7.1 Différentiabilité

### *Holomorphie*

On identifie implicitement  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  par  $z = x + iy$ .

Montrer qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  est dérivable par rapport à  $z$  si et seulement si ses dérivées partielles vérifient  $\partial_x f + i\partial_y f = 0$ .

Admettant que  $f$  est alors  $\mathcal{C}^\infty$ , prouver que  $\Delta \Re f = \Delta \Im f = 0$ .

En déduire que  $\Delta |f|^2 = 2(|\nabla \Re f|^2 + |\nabla \Im f|^2) \geq 0$ .

### *Distance d'une cubique à l'origine*

Étant donné  $a$ , un réel strictement positif, quelle est la distance à l'origine de la cubique d'équation  $xyz = a$  ?

Est-elle atteinte ? Où ?

### *Rang de la différentielle dans un espace de matrices*

Soit  $g$  la fonction qui à une matrice carrée complexe  $M$  de taille  $n$  associe le vecteur  $(\operatorname{tr} M, \dots, \operatorname{tr} M^n)$ . Montrer que le rang de différentielle de  $g$  en  $M$  est le degré du polynôme minimal de  $M$ .

## 7.2 Équations aux dérivées partielles

### *L'équation de transport de Burger*

Fixons  $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On notera  $(t, x)$  les points de  $\mathbb{R}^2$ .

Déterminer l'ensemble des solutions  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  du problème différentiel  $\partial_t u - \partial_x u = 0$  vérifiant la condition initiale  $u(0, x) = u_0(x)$ .

Faire de même avec le problème  $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ .

INDICATION. Regarder les lignes de niveau d'une solution  $u$ , i.e. les  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  pour lesquels  $u \circ \varphi$  est constante.

## 7.3 Problèmes d'extrémums

### *Fonctions à laplacien positif sur $\mathbb{B}^2$*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{B}^2$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overset{\circ}{\mathbb{B}}^2$ . Supposant qu'en tout point de  $\overset{\circ}{\mathbb{B}}^2$  on ait  $\Delta f \geq 0$ , montrer que  $f$  atteint son maximum sur  $\partial \mathbb{B}^2$ .

INDICATION. Commencer par supposer  $\Delta f > 0$  (on diagonalisera la matrice hessienne) puis considérer  $f + \varepsilon \|\cdot\|^2$ .

### *Extremum de la somme sur un domaine fermé*

Se donnant un réel strictement positif  $a$ , étudier les extrémums de la fonction  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum x_i$  sur le domaine  $(\mathbb{R}_+^{\times})^n \cap \sum x_i^{-1} = a$ .

## 7.4 Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

### *Fonctions différentiellement isométriques*

Montrer qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  d'un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la différentielle en tout point est une isométrie est une isométrie.

INDICATION. Commencer par voir que cette fonction est localement une isométrie puis considérer une base affine.

## 7.5 Intégrales multiples

### *Volume de la boule de dimension $n$*

Calculer, en dimension  $n$ , le volume de la boule unité et l'aire de la sphère unité.  
En quels dimensions ces quantités sont-elles maximales ?

### *Fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ d'intégrale nulle*

Soit une fonction  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact ; on note cela  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

Montrer que  $\int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 0$  si et seulement si il existe une famille  $(g_i)$  de fonctions de  $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  telle que  $\sum_{i=1}^n \partial_{x_i} g_i = g$ .

### *Points d'un réseau dans un domaine se dilatant*

Soit  $D$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$  dont la frontière est paramétrable par une famille finie de fonctions lipschitziennes à variable dans  $\mathbb{I}^{n-1}$  (i.e.  $\partial D$  est recouvert par les images de ces fonctions) et soit un réseau de domaine fondamental  $F$  (on peut prendre  $\mathbb{Z}^n$  pour réseau, alors  $F = [0; 1]^n$ ).

Montrer que le nombre de points du réseau contenu dans  $\lambda D$  est, lorsque le réel  $\lambda$  tends vers l'infini, équivalent à  $\frac{\text{vol } D}{\text{vol } F} \lambda^n$ .



# Algèbre euclidienne et hermitienne

## 8.1 Espaces euclidiens et hermitiens

### *Polynômes orthogonaux*

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $p$  une fonction convenable de  $I$  dans  $\mathbb{R}_+^\times$ .

On pose  $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)p(t)dt$ ; c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

On applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$ , i.e.  $(X^i)$ , et obtient  $(P_i)$ , une famille de polynômes vérifiant  $\langle P_i, P_j \rangle = \delta_i^j$  et  $\text{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$ .

Montrer que  $P_i$  est scindé à racines simples sur  $\mathring{I}$ .

Trouver  $(\lambda_i)$  et  $(\mu_i)$ , deux suites réelles telles que  $P_i = (x + \lambda_i)P_{i-1} - \mu_i P_{i-2}$ .

Vérifier que  $\mu_i > 0$ .

Établir enfin que les racines de  $P_i$  sont entrelacées dans celles de  $P_{i-1}$ .

### *Des vecteurs qui se tournent le dos*

Montrer que, si dans un espace euclidien  $E$  on peut trouver  $n$  vecteurs  $v_i$  tels que  $\langle v_i, v_j \rangle < 0$  pour tous indices  $i \neq j$ , alors  $\dim E \geq n - 1$ .

### *Matrices de Gram et inégalité d'Hadamard*

Pour toute famille  $v = (v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs d'un espace euclidien, on note  $G_v$  la matrice de terme général  $\langle v_i, v_j \rangle$ .

Montrer que le rang de  $G_v$  est celui de  $v$  et que son déterminant est positif.

Prouver que si  $v$  est une famille libre alors  $\|x - \pi_{(v)}^\perp x\|^2 = \det G_{(x, v_1, \dots, v_n)} / \det G_v$ .

En déduire que  $\det G_v \leq \prod_i \|v_i\|^2$  et caractériser le cas d'égalité.

**Groupes finis de symétries**

Nous notons, lorsque  $x$  est un élément non nul d'un espace euclidien,  $\sigma_x$  la symétrie orthogonale par rapport à  $x^\perp$ . Soit  $(x_i)$  une famille finie de points de  $E \setminus \{0\}$ ; on note  $G$  le groupe engendré par  $(\sigma_{x_i})$ .

Montrer que  $\bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{id}) = 0 \Leftrightarrow \text{vect}(x_i) = E$ .

Vérifier que  $\{x \in E : \|x\| = 1 \text{ et } \exists g \in G, \exists i, \sigma_x = g^{-1} \sigma_{x_i} g\}$  est stable par  $G$  et qu'il est fini si et seulement si  $G$  l'est.

**Identifier une isométrie de l'espace**

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soient  $s$  une symétrie orthogonale et  $r$  une rotation. Qu'est  $s \circ r \circ s$  ?

**Les fonctions droites**

Soit  $H$  un espace de Hilbert.

Quelles sont les fonctions  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{I}, H)$  qui vérifient  $\int \|f\| = \|\int f\|$  ?

**Autour de Householder**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .

On définit pour  $(u, v) \in E^2$  l'application  $\rho_{u,v} : x \mapsto x - \langle v, x \rangle u$ .

Quels sont les espaces propres de cette application ?

Est-elle diagonalisable ?

Donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité et donner son adjoint.

Montrer que pour tout  $u$  non nul, il existe un unique  $\hat{u}$  (que l'on déterminera) tel que  $\rho_{u,\hat{u}}$  soit orthogonal.

**Théorème ergodique de Von Neumann**

Soit  $T$  une application linéaire sur un espace de Hilbert  $H$  telle que  $\|T\| \leq 1$ .

Montrer que  $T(x) = x \Leftrightarrow T^*(x) = x$ .

Prouver que l'adhérence  $E$  de l'image de  $T - \text{id}$  est en somme directe orthogonale avec son noyau  $F$ .

En déduire que la suite  $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(x)\right)$  converge vers la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  (parallèlement à  $E$ ).

## 8.2 Formes quadratiques et hermitiennes

### *Norme matricielle et rayon spectral*

Soit une matrice carrée  $M$  à coefficients réels.

On pose  $\|M\|_2 = \sup_{x \neq 0} \|Mx\|_2 / \|x\|_2$  et on note  $\rho$  l'opérateur « rayon spectral », i.e.

$\rho : M \mapsto \max\{|\lambda| : \ker(M - \lambda \text{id}) \neq \{0\}\}$ .

Montrer que  $\|M\|_2^2 = \rho(M'M)$ .

### *Déterminant des matrices antisymétriques*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique. Que dire de la forme définie sur les couples

de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : (X, Y) \mapsto \det \begin{pmatrix} A & X \\ -{}^tY & 0 \end{pmatrix}$  ?

Qu'en déduire en ce qui concerne les déterminants des matrices antisymétriques ?

INDICATION. Si  $n$  est impair, cette forme bilinéaire symétrique n'est pas nulle et sa matrice est de rang un ; on peut donc écrire  $\varphi(X, X) = \alpha \langle X, V \rangle^2$  et montrer par récurrence que  $\alpha \geq 0$ .

## 8.3 Endomorphismes orthogonaux et unitaires

## 8.4 Endomorphismes autoadjoints et normaux

### *Diagonalisation en base orthonormée des endomorphismes normaux*

Montrer qu'un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est normal (i.e. qu'il commute avec son adjoint) si et seulement s'il est diagonalisable dans une base orthonormée.

Qu'en est-il des endomorphismes orthogonaux de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?



## Exercices et problèmes de révision

### *Transcendance de e*

Supposons qu'il existe un polynôme  $A(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  à coefficients entiers et de degré  $n$  strictement positif dont  $e$  soit racine. On peut aussi supposer  $a_0 \neq 0$ .

Soit  $p$  un nombre premier et notons  $P(X)$  le polynôme  $\frac{X^{p-1}}{(p-1)!} (X-1)^p \dots (X-n)^p$ .

Montrer, par récurrence sur le degré de  $P$ , l'égalité  $e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$ , où l'on a posé  $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)}(X)$  et  $R(\alpha) = e^\alpha \int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} P(\alpha x) dx$ .

En déduire que  $\sum_{j=0}^n a_j Q(j) + \sum_{j=0}^n a_j R(j) = 0$ .

a. Montrer que  $\sum_{j=1}^n a_j Q(j)$  est un entier divisible par  $p$  mais que, lorsque  $p$  grand, ce n'est pas le cas de  $a_0 P^{(p-1)}(0)$ . En déduire que  $|\sum_{j=0}^n a_j Q(j)| \geq 1$ .

b. Montrer que  $|R(j)| \leq n e^n \frac{(n!)^p}{(p-1)!}$  (on majorera  $P$  sur  $[0; n]$ ). En déduire que, lorsque  $p$  est grand,  $|\sum_{j=0}^n a_j R(j)| < 1$  et conclure.

***Théorème de Brouwer***

Supposons qu'il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}^2)$  sans point fixe.

a. Établir l'existence d'une unique application  $\rho : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\text{im}(\text{id} + \rho \cdot (\text{id} - f)) \subseteq \mathbb{S}^2$ . On pose  $\alpha = \rho \cdot (\text{id} - f)$ .

$$\text{Écrivons } \psi : (x, t) \in \mathbb{B}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \begin{vmatrix} 1 + t\partial_{x_1}\alpha_1 & t\partial_{x_2}\alpha_1 \\ t\partial_{x_1}\alpha_2 & 1 + t\partial_{x_2}\alpha_2 \end{vmatrix} = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x).$$

b. Montrer que  $\int_{\mathbb{B}} \beta = 0$ .

c. Montrer que  $\int_{\mathbb{B}} \gamma = \int_{\mathbb{B}} \partial_{x_1}\alpha_1\partial_{x_2}\alpha_2 - \int_{\mathbb{B}} \partial_{x_2}\alpha_1\partial_{x_1}\alpha_2$  et, en faisant deux intégrations par parties pour chaque terme du membre de droite ainsi qu'en utilisant le théorème de Schwarz, montrer la nullité de cette intégrale.

d. En déduire que la fonction  $t \in [0; 1] \mapsto \int_{\mathbb{B}} \psi(\cdot, t)$  est constante bien que ses valeurs en 0 et en 1 soient distinctes.

NOTE. Cette démonstration se généralise en dimension arbitraire.

***Étude d'une équation particulière***

Soit le problème différentiel  $xy'' + 2y' + \frac{x}{y} = 0$ .

a. Montrer que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique sur chaque quadrant et que les graphes sont invariants par symétrie selon  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $O$  ainsi que par homothétie.

Considérons le quart de plan  $\{x > 0, y > 0\}$  et soit  $\varphi$  une solution définie sur  $]a, b[$ .

b. Calculer  $(x^2\varphi)'$  à l'aide de  $\varphi$  et en observer le signe.

$\varphi$  a-t-elle un minimum ? Montrer que, sur un intervalle de la forme  $[a', b[$ ,  $\varphi$  est monotone.

c. Supposons que  $b = \infty$ . Que dire des variations de  $x^2\varphi'$  ? En l'infini, aboutir à une contradiction.

d. Trouver  $\lim_{x \rightarrow b} \varphi$ . En regardant  $x^2\varphi'$ , voir que  $\lim_{x \rightarrow b} \varphi' = -\infty$ .

INDICATION.

– On trouve  $(x^2\varphi)' = -\frac{x^2}{\varphi}$  ; comme  $x^2\varphi'$  est décroissante,  $\varphi'$  ne peut changer de signe qu'une fois.

– Comme  $x^2\varphi'$  est décroissante,  $x\varphi'$  tend vers 0 en l'infini ; si  $x > y$ ,  $\varphi(x) \leq \varphi(y) + y\varphi'(y)$  et  $\varphi$  est bornée. Si  $0 < \varphi \leq M$ ,  $-\frac{x^2}{\varphi} \leq -\frac{x^2}{M}$  d'où  $x^2\varphi' - y^2\varphi' \leq \frac{1}{3M}(y^3 - x^3)$ .