

# Quadrangulations aléatoires et processus de branchement

Jérémie BETTINELLI

Mai 2008

## Résumé

Au cours de ce rapport réalisé à partir de l'article de Maxim KRIKUN [3] dans le cadre du cours de Grégory MIERMONT, nous montrons comment on peut coder l'enveloppe d'une quadrangulation par un certain processus de branchement, et nous donnons quelques applications de cette méthode. Nous nous intéressons particulièrement à la frontière de l'enveloppe de taille  $R$  et nous montrons l'existence de cycles de longueur linéaire en  $R$  séparant la racine de l'infini.

## Table des matières

<b>1 Définitions</b>	<b>1</b>
1.1 Quadrangulations . . . . .	2
1.2 Métrique . . . . .	3
1.3 Enveloppe . . . . .	3
<b>2 Dénombrement de quadrangulations</b>	<b>5</b>
2.1 Asymptotiques . . . . .	5
2.2 Probabilité d'avoir une enveloppe donnée . . . . .	6
<b>3 Lien avec un certain processus de branchement</b>	<b>7</b>
3.1 Structure de l'enveloppe . . . . .	7
3.2 Description des tranches . . . . .	7
3.3 Squelette d'une enveloppe . . . . .	9
3.4 Forêt induite . . . . .	10
3.5 Processus de branchement . . . . .	11
<b>4 Applications</b>	<b>12</b>
4.1 Preuve du théorème 1 . . . . .	12
4.2 Étude de $ \gamma_R $ . . . . .	13
4.3 Cycle linéaire séparant la racine de l'infini . . . . .	14

## 1 Définitions

On reprendra les notions et notations utilisées par Grégory MIERMONT dans son cours [4]. On y renvoie le lecteur pour une description plus précise. On ne se placera ici que dans le cas du genre  $g = 0$ .

## 1.1 Quadrangulations

**Définition 1** Une *carte planaire* est un graphe non vide plongé dans  $\mathbb{S}^2$  de façon que chaque composante connexe du complémentaire du support de la carte<sup>1</sup> soit homéomorphe au disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2** On appelle *face* de cette carte les composantes connexes du complémentaire de son support. Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

**Définition 3** Une carte  $\mathbf{m}$  est dite *enracinée* si une arête orientée  $e$  est distinguée. L'arête distinguée s'appelle la *racine* et son origine est appelée *sommet racine*.

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera encore  $\mathbf{m}$  une carte enracinée au lieu de  $(\mathbf{m}, e)$  et on appellera souvent simplement "carte" une carte enracinée.

On regardera les cartes à isomorphisme près. L'avantage de considérer des cartes enracinées est qu'elles n'ont aucun automorphisme (i.e. symétrie) non trivial.

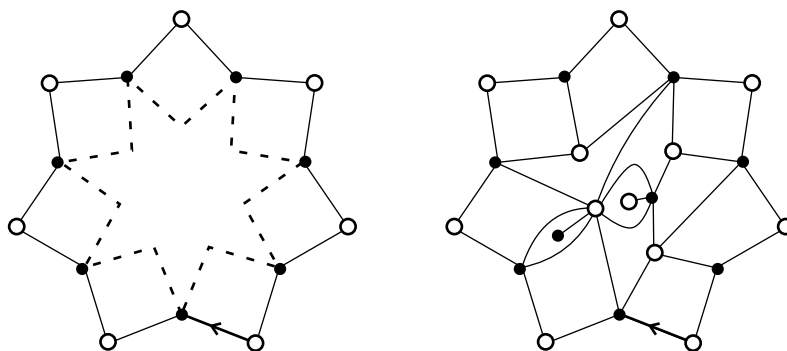
**Définition 4** On appelle *quadrangulation* une carte dont toutes les faces sont des carrés (i.e. ont quatre cotés). Une *quadrangulation à bord* est une carte dont toutes les faces sont des carrés sauf éventuellement la face incidente à la racine.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $\mathcal{Q}_n$  l'ensemble des quadrangulations à  $n + 1$  faces.

**Définition 5** On dit que le bord d'une quadrangulation à bord est *simple* si aucun sommet n'est rencontré plusieurs fois lorsque l'on en fait le tour et si un sommet sur deux du bord est de degré deux.

Par convention, on enracinera les quadrangulations à bord de sorte que le sommet racine soit de degré deux (c.f. figure 1).

Il est naturel de dessiner une carte planaire dans le plan en "ouvrant" la face incidente à la racine. On appellera ainsi *face externe* d'une quadrangulation à bord la face incidente à la racine et *faces internes* les autres faces (carrées).



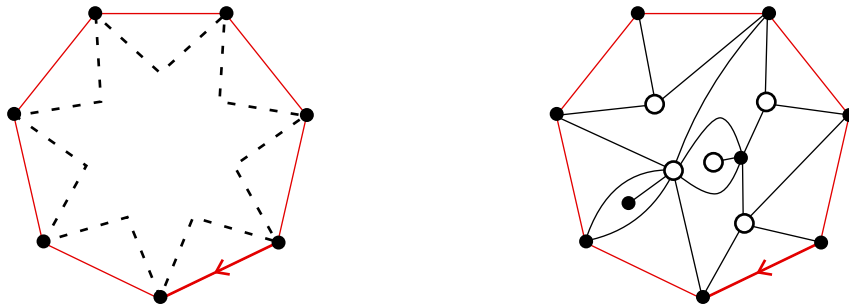
**FIGURE 1** – Bord simple d'une quadrangulation (à gauche) et exemple de quadrangulation à bord simple (à droite).

Il est facile de voir qu'un bord est de degré pair et qu'une quadrangulation à bord est bipartite<sup>2</sup>.

1. Le **support** de la carte est la réunion des arêtes du graphe plongé.

2. i.e. que l'on peut la colorier de deux couleurs sans que deux sommets voisins soient de même couleur.

**Définition 6** Enfin, on appellera **quadrangulation à frontière** une carte obtenue à partir d'une quadrangulation à bord simple en "supprimant" les sommets de degré deux le long du bord (voir figure 2). On appellera  $(n, m)$ -**quadrangulation** une quadrangulation à frontière avec  $n$  faces internes et  $m$  arêtes sur la frontière.



**FIGURE 2** – Frontière d'une quadrangulation et exemple de  $(13, 7)$ -quadrangulation (correspondant à la quadrangulation à bord simple de la figure 1).

L'opération permettant de passer d'une quadrangulation à bord simple à une quadrangulation à frontière est clairement réversible et on a donc une bijection entre les quadrangulations à bord simple à les quadrangulations à frontière.

## 1.2 Métrique

À tout sommet, on associe sa **hauteur**, correspondant à la distance de graphe de ce sommet au sommet racine. Pour un entier  $R$  et une quadrangulation (enracinée)  $\mathbf{q}$ , on appelle **boule** de taille  $R$ , que l'on note  $B_R(\mathbf{q})$ , la carte composée des faces de  $\mathbf{q}$  dont un des sommets est de hauteur strictement inférieure à  $R$ .

On peut alors mettre une métrique naturelle sur l'ensemble des quadrangulations finies,

$$d(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \inf \left\{ \frac{1}{R+1}, \mid B_R(\mathbf{q}_1) = B_R(\mathbf{q}_2) \right\}.$$

Notons alors  $\mathcal{Q}$  le complété de l'ensemble des quadrangulations pour cette distance. Les éléments de  $\mathcal{Q}$  qui ne sont pas des quadrangulations finies seront appelés **quadrangulations infinies**.

Soit  $\mu_n$  la probabilité uniforme sur  $\mathcal{Q}_n$ . On a alors :

**Théorème 1** La suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement vers une probabilité  $\mu$  portée par les quadrangulations infinies.

On donnera un schéma de preuve de ce théorème au cours de la section 4.1.

## 1.3 Enveloppe

Le caractère bipartite d'une quadrangulation implique qu'il ne peut exister que deux types de face :

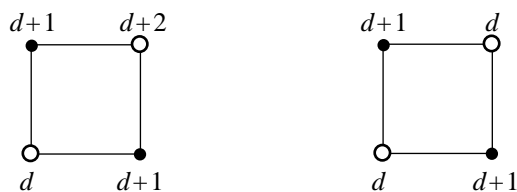


FIGURE 3 – Les deux types de face possibles : **simple** (à gauche), **confluente** (à droite).

En général,  $B_R(\mathbf{q})$  est une quadrangulation “à trous”, en ce sens que c’est une quadrangulation avec plusieurs bords, formés des carrés simples dont les sommets ont pour hauteur  $R - 1$ ,  $R$ ,  $R$  et  $R + 1$ . De plus, dans une grande quadrangulation aléatoire conditionnée à avoir une certaine boule de taille  $R$ , un seul trou contient la majorité des faces. Ceci motive la définition suivante :

Soit  $\mathbf{q}$  une quadrangulation (enracinée) et  $R$  un entier. Considérons le complémentaire de la plus grande<sup>3</sup> composante connexe de  $\mathbf{q} \setminus B_R(\mathbf{q})$ . Retirons-lui les sommets de hauteur  $R + 1$  (par la même procédure que pour définir les quadrangulations à frontière).

**Définition 7** Le résultat obtenu est une quadrangulation à frontière que l’on appelle **enveloppe** de taille  $R$  de  $\mathbf{q}$  et que l’on note  $\hat{B}_R(\mathbf{q})$ .

Voici un exemple de quadrangulation :

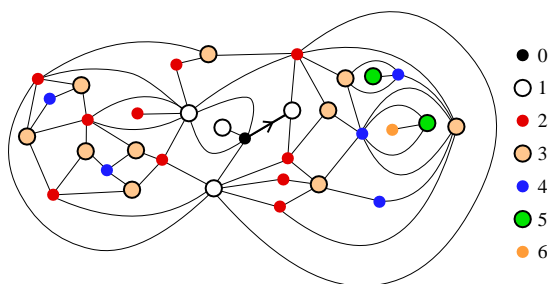
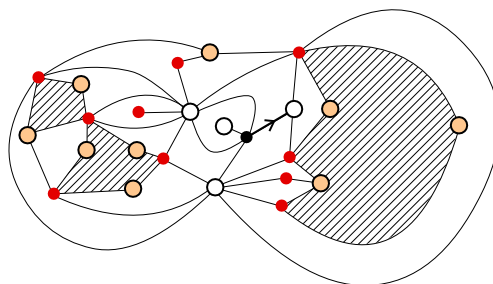


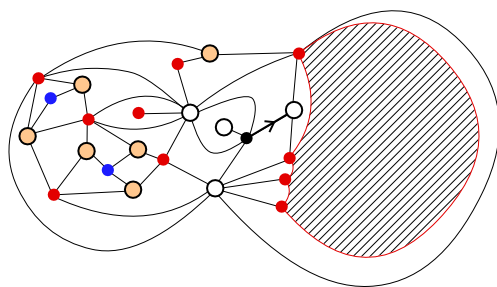
FIGURE 4 – Exemple de quadrangulation enracinée. Les sommets sont dessinés de diverses couleurs en fonction de leur hauteur.

La boule de taille 2 est une quadrangulation à trous (ici un carré et deux hexagones) :

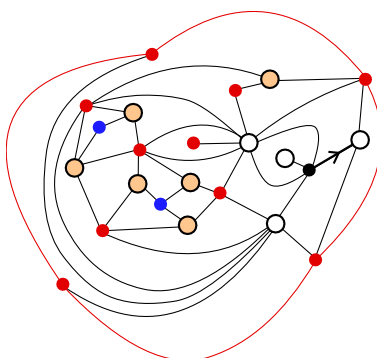


L’enveloppe de taille 2 est une quadrangulation à frontière :

3. au sens où la taille d’une carte est son nombre de faces. Dans le cas où la plus grande composante connexe n’est pas unique, on en choisit une de façon déterministe (ce cas ne se produit qu’avec faible probabilité pour  $n$  grand).



On peut la dessiner de sorte que la frontière soit à l'extérieur :



## 2 Dénombrement de quadrangulations

### 2.1 Asymptotiques

Notons  $C(n)$  le nombre de quadrangulations à  $n+1$  faces (c'est-à-dire  $C(n) = |\mathcal{Q}_n|$ ) et  $C(n, m)$  le nombre de  $(n, m)$ -quadrangulations, c'est-à-dire le nombre de quadrangulations à bord simple avec  $n$  faces internes et  $2m$  arêtes sur le bord.

À l'aide des séries génératrices des quadrangulations et des quadrangulations à frontière, on obtient l'asymptotique (voir KRÍKUN [3, section 2 et 5] pour la preuve) :

**Lemme 2** *On a l'équivalent suivant, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,*

$$C(n, m) \sim \frac{b(m)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} n^{-\frac{5}{2}} 12^n,$$

où

$$b(m) := [y^m] \frac{64\sqrt{3}y}{\sqrt{(y-18)(y-2)^3}}.$$

Si on prend une  $(n, 1)$ -quadrangulation, que l'on enlève la frontière puis que l'on recolle les deux arêtes restantes en une seule autour de la face externe, on retrouve une quadrangulation à  $n$  faces enracinée en cette nouvelle arête. Cette opération est réversible, il suffit "d'ouvrir" la racine en la face externe. On a ainsi

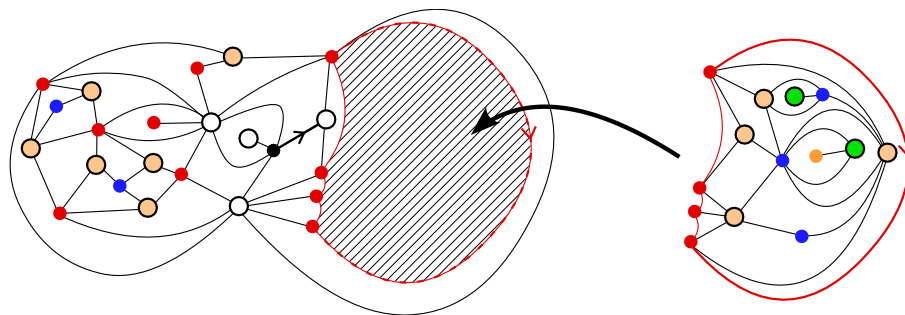
$$C(n) = C(n+1, 1),$$

d'où l'asymptotique, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$C(n) \sim \frac{b(1)}{12 \Gamma(\frac{3}{2})} n^{-\frac{5}{2}} 12^n.$$

## 2.2 Probabilité d'avoir une enveloppe donnée

Donnons-nous une méthode déterministe pour distinguer une arête orientée de la frontière d'une enveloppe en fonction de la racine de la quadrangulation. Ainsi on peut décomposer toute quadrangulation en son enveloppe de taille  $R$  (enracinée une fois à l'intérieur, et une fois sur la frontière) et une quadrangulation à frontière (enracinée sur la frontière). Et on peut ensuite reconstituer la quadrangulation de départ à partir de ces deux cartes et collant la quadrangulation à frontière à l'intérieur du trou de  $B_R(\mathbf{q})$  de sorte que les arêtes coïncident et en effaçant ensuite la frontière (voir figure 5).



**FIGURE 5** – Décomposition de la quadrangulation de la figure 4 en son enveloppe de taille 2 et une quadrangulation à frontière et reconstitution.

On a alors la proposition suivante :

**Proposition 3** Soit  $K$  une  $(n, m)$ -quadrangulation telle qu'il existe une quadrangulation  $\mathbf{q}$  vérifiant  $K = \hat{B}_R(\mathbf{q})$ . Si  $\mathbf{q}_N$  est uniforme sur  $\mathcal{Q}_N$ , alors

$$\mathbb{P} \left( \hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}.$$

**Preuve.** On suppose  $N$  assez grand, il s'agit de compter le nombre de quadrangulations de  $\mathcal{Q}_N$  dont l'enveloppe de taille  $R$  est  $K$ . Compte tenu de la description précédente, c'est le nombre de quadrangulations à frontière avec  $m$  arêtes sur la frontière et  $N - n + m$  faces internes (le terme "+ $m$ " provenant du fait qu'il faut deux triangles bordant la frontière pour faire un carré).

Ainsi, on obtient

$$\mathbb{P} \left( \hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K \right) = \frac{C(N - n + m, m)}{C(N)} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1},$$

d'après les asymptotiques du lemme 2. □

### 3 Lien avec un certain processus de branchement

#### 3.1 Structure de l'enveloppe

Donnons-nous un entier  $R$ , et soit  $K$  une enveloppe potentielle de taille  $R$ , c'est-à-dire telle qu'il existe une quadrangulation  $\mathbf{q}$  vérifiant  $K = \hat{B}_R(\mathbf{q})$ . Si  $\mathbf{q}$  est assez grande (par exemple si elle contient au moins deux fois plus de faces que  $K$ ), alors les enveloppes de taille  $r$ , pour  $r \leq R$ , sont "emboîtées" (dans un sens que l'on va préciser) car la plus grande composante du complémentaire des boules de taille  $r$  est "toujours la même".

Pour  $r \leq R$ , l'enveloppe  $\hat{B}_r(\mathbf{q})$  est une quadrangulation à frontière, notons  $\gamma_r(\mathbf{q})$  sa frontière. Par convention,  $\gamma_0(\mathbf{q})$  sera le sommet racine.

Notons  $\bar{B}_r(\mathbf{q})$  l'enveloppe  $\hat{B}_r(\mathbf{q})$  à laquelle on a ajouté les lacets  $\gamma_1(\mathbf{q}), \gamma_2(\mathbf{q}), \dots, \gamma_{r-1}(\mathbf{q})$ . On a alors l'imbrication suivante :

$$\bar{B}_1(\mathbf{q}) \subseteq \bar{B}_2(\mathbf{q}) \subseteq \dots \subseteq \bar{B}_R(\mathbf{q}).$$

**Définition 8** On appellera *tranche* de taille  $r$  la carte à deux frontières suivante :

$$L_r(\mathbf{q}) := \bar{B}_r(\mathbf{q}) \setminus \bar{B}_{r-1}(\mathbf{q}).$$

Dans le découpage de la figure 6, le fait que les enveloppes soient bien imbriquées les unes dans les autres jusqu'à la fin est fortuit. Néanmoins, si on s'arrête à  $R$  et que la quadrangulation est assez grande, on est assuré de bien être dans ce cas.

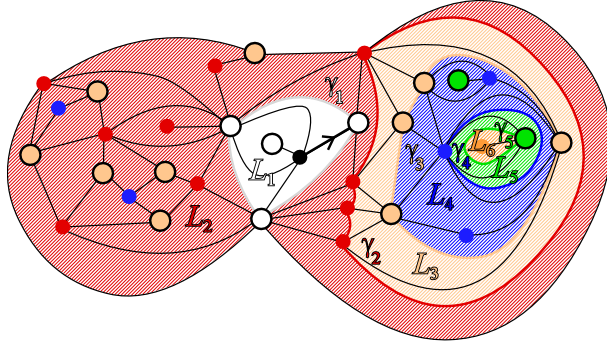


FIGURE 6 – Découpage de la quadrangulation de la figure 4 en tranches.

En fait, tous les ensembles que l'on vient de définir ne dépendent que de  $K$  et non de  $\mathbf{q}$ . Ainsi lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, on notera simplement  $\gamma_r$  et  $L_r$  pour  $\gamma_r(\mathbf{q})$  et  $L_r(\mathbf{q})$ .

#### 3.2 Description des tranches

Une façon naturelle de représenter la carte est de le faire sur la sphère déformée de sorte que chaque sommet soit dessiné à la bonne hauteur. On obtient alors une structure ressemblant à un "cactus". En "aplatissant" les petites branches, on voit très nettement la structure en tranche se dessiner (voir figure 7).

Regardons de plus près une tranche  $L_r$  :

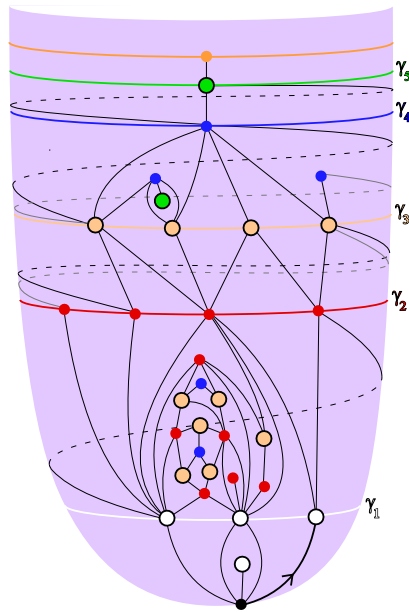


FIGURE 7 – Représentation de la structure en tranches de la quadrangulation de la figure 4 sur une déformation de la sphère.

- ◇ elle a deux frontières, une supérieure –  $\gamma_r$  – et une inférieure –  $\gamma_{r-1}$ ,
- ◇ chaque arête de la frontière supérieure est reliée en un triangle simple à un sommet de la frontière inférieure,
- ◇ entre ces triangles se situent des **blocs**.

Les blocs correspondent à peu près aux trous des boules successives. Ce sont, à condition de leur rajouter une arête supplémentaire qui deviendra la racine, des quadrangulations à frontière (voir figure 8). On dira qu'un bloc est de taille  $l$  (on parlera alors de  $l$ -bloc) si la frontière de la quadrangulation à frontière qui lui correspond est de longueur  $l$ . Si deux triangles reliant la frontière supérieure à la frontière inférieure sont collés, on conviendra que l'on a un 1-bloc – qui est simplement une arête – entre les deux.

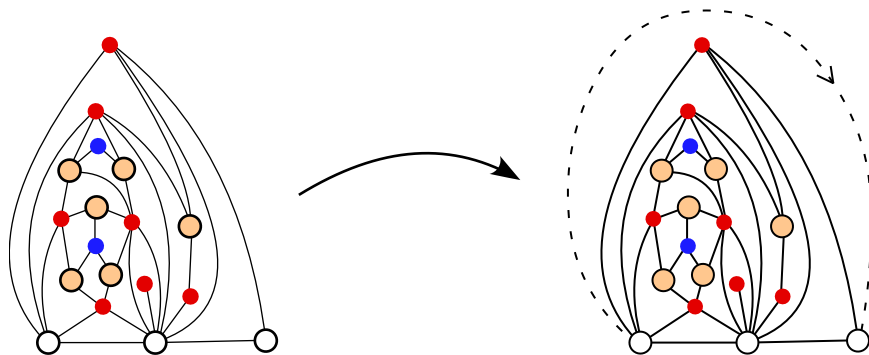


FIGURE 8 – Exemple de 3-bloc et  $(17, 3)$ -quadrangulation associée.

Pour ajouter une arête à un bloc, on la fait simplement passer “au-dessus” comme sur la figure 8. Lorsqu’il n’y a qu’un seul bloc qui ne soit pas un 1-bloc sur une tranche, la “base” de ce bloc fait un tour. Il faut alors dédoubler le sommet du triangle reliant la frontière supérieure à l’inférieure et procéder comme avant. Voir les tranches  $L_1$ ,  $L_4$  et  $L_5$  de la figure 11.

### 3.3 Squelette d’une enveloppe

On cherche maintenant à décomposer l’enveloppe  $K$ . Pour ceci, on va lui retirer l’intérieur de ses blocs. On obtient alors une carte à trous :

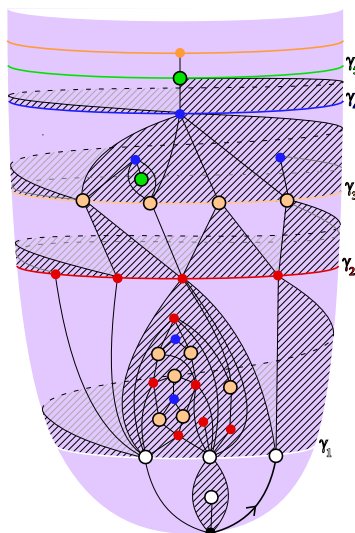


FIGURE 9 – Les blocs sont hachurés et leur structure intérieure est visible.

Si on connaît cette structure ainsi que l’intérieur des blocs, on peut reconstituer l’enveloppe à ceci près qu’on ne sait pas où se situe la racine sur la première tranche.

Pour régler ce problème, on transforme la racine en un carré dont deux cotés sont identifiés et forment la nouvelle racine. Autrement dit, on rajoute un niveau  $-1$  (voir figure 10). On a alors une seule arête entre le niveau  $-1$  et le niveau  $0$ , c’est la racine.

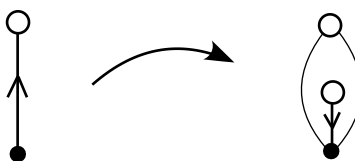


FIGURE 10 – Transformation de la racine.

On peut alors définir la notion de squelette.

**Définition 9** On appelle *squelette* de l’enveloppe  $K$ , que l’on notera  $Sq(K)$ , la carte obtenue à partir de  $K$  en lui retirant l’intérieur de ses blocs après avoir transformé sa racine à l’aide de la procédure décrite par la figure 10.

Une enveloppe est ainsi codée par son squelette et ses blocs.

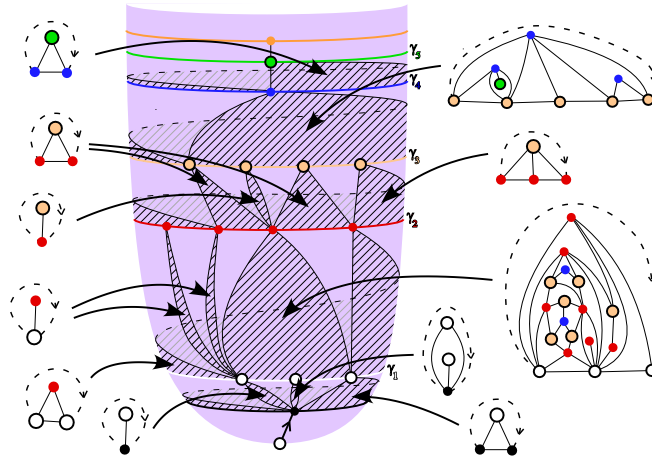


FIGURE 11 – Squelette de la quadrangulation de la figure 4 et ses blocs.

**Définition 10** On appellera squelette de taille  $R$  de la quadrangulation  $q$  le squelette de son enveloppe de taille  $R$ , c'est-à-dire

$$S_R(q) := Sq(\hat{B}_R(q)).$$

### 3.4 Forêt induite

La structure en tranche permet de coder un squelette par une forêt. Pour ce faire, on procède de la manière suivante :

- ◇ chaque arête des  $\gamma_r$  est un sommet de la forêt,
- ◇ on relie les sommets en traversant les blocs “par la gauche” (voir figure 12).

Ainsi  $\gamma_r$  est l'ensemble des points à hauteur  $R - r$  dans la forêt.

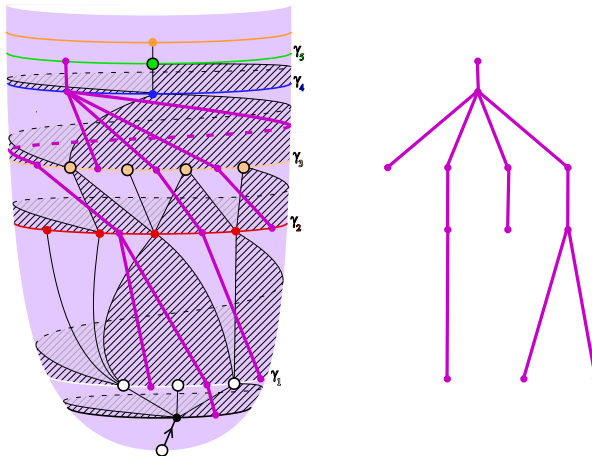


FIGURE 12 – Forêt associée au squelette de la quadrangulation de la figure 4. Comme  $|\gamma_5| = 1$ , il n'y a qu'un arbre dans la forêt.

La forêt induite comporte  $|\gamma_R|$  arbres. Ils sont tous de hauteur strictement inférieure à  $R$  sauf un seul qui est de hauteur exactement  $R$ . L'unique branche entre la hauteur  $R - 1$  et  $R$  correspond à l'endroit où était la racine avant l'opération de la figure 10.

Chaque sommet de la forêt correspond à un bloc du squelette, à savoir celui qui est "en dessous à droite" : un sommet ayant  $l - 1$  enfants correspondant à un  $l$ -bloc.

Si on se donne une façon déterministe pour distinguer le premier arbre de la forêt (on peut par exemple prendre celui qui correspond à la racine de la frontière, racine déterminée par la même méthode que dans la section 2.2), alors une enveloppe peut être codée par une forêt et une famille de blocs correspondants aux sommets de ces forêts.

On notera  $Sq(K) \leftrightarrow F$  si le squelette  $Sq(K)$  est codé par la forêt  $F$ .

### 3.5 Processus de branchement

Il est naturel de représenter un processus de branchement par une forêt, le nombre d'arbres correspondant au nombre de particules présentes à l'instant initial. Considérons un processus de branchement dont la loi de reproduction a pour fonction génératrice  $\varphi$ . Alors la probabilité que la trajectoire du processus soit la forêt  $F$  est :

$$\prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t), \quad (1)$$

où, pour tout sommet  $v \in F$ ,  $d(v)$  est son nombre d'enfants.

On est maintenant en mesure d'estimer la probabilité asymptotique qu'une carte  $\mathbf{q}_N$  prise uniformément dans  $\mathcal{Q}_N$  ait un squelette codé par une certaine forêt  $F$  vérifiant les conditions nécessaires (c'est-à-dire telle qu'il existe une carte  $\mathbf{q}$  vérifiant  $F = S_R(\mathbf{q})$ ) : si la forêt a  $m$  arbres et si le bloc codé par le sommet  $v \in F$  a  $n_v$  faces, alors l'enveloppe, formée du squelette correspondant à  $F$  dans les trous duquel on a mis les blocs, contient  $m - 1 + \sum_{v \in F} (n_v - 1)$  faces<sup>4</sup>.

Ordonnons de façon arbitraire les sommets de  $F$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , on a alors, grâce à la proposition 3,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) &= \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\ &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p=0}^{\infty} \sum_{K, Sq(K) \leftrightarrow F, \forall i, n_{v_i}=n_i} \mathbb{P}(\hat{B}_R(\mathbf{q}_N) = K) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_p=0}^{\infty} \left( \prod_{i=1}^p C(n_i, d(v_i) + 1) \right) \frac{b(m)}{b(1)} 12^{-\sum_{i=1}^p (n_i - 1)} \\ &= \frac{b(m)}{b(1)} \prod_{i=1}^p \sum_{n_i=0}^{\infty} C(n_i, d(v_i) + 1) 12^{-(n_i - 1)}. \end{aligned}$$

4. Chaque bloc, une fois encadré dans le squelette, perd une face d'où les termes " $n_v - 1$ ". Les triangles descendants des tranches deviendront des carrés une fois les blocs encadrés, donc ils sont comptés dans la somme, sauf ceux de la tranche  $L_R$ , d'où le terme " $m$ ". Le " $-1$ " provient du fait que l'on a rajouté une face dans la racine pour former le squelette.

On obtient ainsi une équation semblable à (1). En fait, il est possible de s'y ramener (c.f. KRİKUN [3, section 3.3]) : si on pose

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t} \left( \sqrt{(t-9)(t-1)^3} - 3 + 6t - t^2 \right), \quad (2)$$

alors

$$\mathbb{P}(S_R(\mathbf{q}_N) \leftrightarrow F) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t). \quad (3)$$

## 4 Applications

### 4.1 Preuve du théorème 1

On va montrer ici comment utiliser le processus de branchement lié aux quadrangulations pour montrer le théorème 1. La proposition 3 peut être reformulée de la manière suivante :

$$\mu_N(\mathbf{q}, \hat{B}_R(\mathbf{q}) = K) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu(\mathbf{q}, \hat{B}_R(\mathbf{q}) = K),$$

où  $\mu$  est la mesure définie sur  $\mathcal{Q}$  par

$$\mu(\mathbf{q}, \hat{B}_R(\mathbf{q}) = K) = \frac{b(m)}{b(1)} 12^{m-n-1}$$

si  $K$  est une enveloppe potentielle qui est une  $(n, m)$ -quadrangulation.

Ceci ne suffit pas à prouver la convergence faible de  $\mu_N$  vers  $\mu$ . En effet,  $\mathcal{Q}$  n'étant pas compact, on pourrait perdre de la masse à l'infini. Néanmoins, si  $\mu$  est une probabilité sur  $\mathcal{Q}$ , on aura alors la convergence faible (voir ANGEL et SCHRAMM [1, section 1.2]).

Commençons par évaluer à l'aide de (3), pour  $R$  et  $m$  fixés,  $\mu(\mathbf{q}, |\gamma_R(\mathbf{q})| = m)$ ,

$$\mu(\mathbf{q}, |\gamma_R(\mathbf{q})| = m) = \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} \sum_F \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t), \quad (4)$$

où la somme est sur toutes les forêts à  $m$  arbres de hauteur  $R+1$  qui n'ont qu'un sommet à hauteur  $R+1$ . Le terme  $\frac{1}{m}$  provient du fait que l'on a choisi le premier arbre de la forêt pour coder un squelette. (Si on ne le fait pas, il y a  $m$  forêts qui correspondent au même squelette, ce sont les forêts obtenues en permutant circulairement les arbres de la forêt initiale.)

Si l'on pose

$$f(t) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{b(m)}{b(1)} 2^{m-1} t^m = \frac{3}{4} \left( \sqrt{\frac{9-t}{1-t}} - 3 \right) \quad (5)$$

(voir KRİKUN [3, section 3.4] pour le calcul de cette fonction), et si on considère un processus de branchement  $\xi$  dont la loi de reproduction a pour fonction génératrice  $\varphi$ , alors on peut reformuler (4) :

$$\mu(\mathbf{q}, |\gamma_R(\mathbf{q})| = m) = [t^m] f(t) \mathbb{P}(\xi_R = 1 \mid \xi_0 = m). \quad (6)$$

En effet, sommer sur toutes les forêts que l'on a considérées, revient à sommer sur toutes les trajectoires possibles pour  $\xi$  entre l'état  $m$  à l'instant 0 et l'état 1 à l'instant  $R$ .

Si on note  $\varphi_R := \varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$  la  $R$ -ème itérée de  $\varphi$ , alors

$$\mathbb{P}(\xi_R = n \mid \xi_0 = m) = [t^n] \varphi_R^m(t). \quad (7)$$

Ainsi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(\mathbf{q}, |\gamma_R(\mathbf{q})| = m) = \sum_{m=1}^{\infty} [u^m] f(u) [t] \varphi_R^m(t) = [t] \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} [u^m] f(u) \varphi_R^m(t)}_{f(\varphi_R(t))} = [t] f(\varphi_R(t)).$$

Et enfin (voir KRIKUN [3, section 3.4] pour les calculs),

$$\mu(\mathcal{Q}) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\mathbf{q}, |\gamma_R(\mathbf{q})| = m) = 1,$$

ce qui permet de conclure.

## 4.2 Étude de $|\gamma_R|$

La longueur de  $\gamma_R$  hérite de la propriété de Markov du processus de branchement  $\xi$ . Plus précisément, on a :

**Théorème 4** *Soit  $\mathbf{q}$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{Q}$  de loi  $\mu$ . Alors la variable  $|\gamma_R(\mathbf{q})|$  est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par*

$$\mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\mathbf{q})| = k \mid |\gamma_r(\mathbf{q})| = l) = \frac{[t^k] f(t)}{[t^l] f(t)} \mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k),$$

où  $\xi$  est un processus de branchement dont la loi de reproduction a pour fonction génératrice  $\varphi$  définie par (2) et  $f$  est la fonction définie par (5).

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\gamma_{r+n}(\mathbf{q})| = k, |\gamma_r(\mathbf{q})| = l) &= \frac{1}{k} \frac{b(k)}{b(1)} 2^{k-1} \sum_F \prod_{v \in F} [t^{d(v)}] \varphi(t) \\ &= [t^k] f(t) \mathbb{P}(\xi_n = l, \xi_{r+n} = 1 \mid \xi_0 = k). \end{aligned} \quad (8)$$

La somme est sur toutes les forêts codant un squelette tel que  $|\gamma_{r+n}| = k$  et  $|\gamma_r| = l$ , c'est-à-dire les forêts à  $k$  arbres ayant  $l$  individus à la génération  $n$  et 1 à la génération  $r+n$ . Comme précédemment, cela revient à considérer une certaine classe de trajectoires pour le processus  $\xi$ .

Le caractère markovien de  $\xi$  entraîne que

$$\mathbb{P}(\xi_n = l, \xi_{r+n} = 1 \mid \xi_0 = k) = \mathbb{P}(\xi_n = l \mid \xi_0 = k) \underbrace{\mathbb{P}(\xi_{r+n} = 1 \mid \xi_n = l)}_{\mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = l)},$$

et l'équation (6) se réécrit

$$\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = l) = [t^l] f(t) \mathbb{P}(\xi_r = 1 \mid \xi_0 = l). \quad (9)$$

On obtient alors le résultat souhaité en divisant (8) par (9).  $\square$

En combinant (7) et (9), on peut calculer explicitement  $\mathbb{P}(|\gamma_r(\mathbf{q})| = l)$  et obtenir la proposition suivante (c.f. KRIKUN [3]) :

**Proposition 5** Soit  $\mathbf{q}$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{Q}$  de loi  $\mu$ . Alors

$$2 \frac{|\gamma_R(\mathbf{q})|}{R^2} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{(loi)} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right),$$

où  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$  est une variable aléatoire réelle de densité

$$x \mapsto \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-x}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

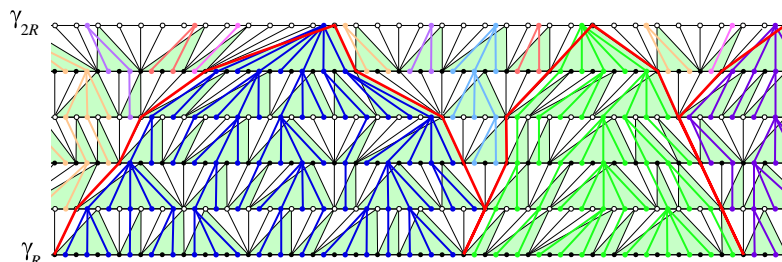
### 4.3 Cycle linéaire séparant la racine de l'infini

Les cycles  $\gamma_R(\mathbf{q})$  séparent la racine de l'infini dans  $\mathbf{q}$ . La proposition 5 montre que la taille de  $\gamma_R$  est de l'ordre de  $R^2$ . En autorisant les chemins à s'éloigner plus de la racine, on peut trouver des cycles plus courts séparant la racine de l'infini, en restant toujours à distance supérieure à  $R$ , c'est-à-dire hors de l'enveloppe de taille  $R$ .

**Proposition 6** Soit  $\mathbf{q}$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{Q}$  de loi  $\mu$ . Alors, pour tout entier  $R$ , il existe dans  $\mathbf{q}$  un cycle séparant la racine de l'infini et restant à une distance supérieure à  $R$  dont la longueur croît au plus linéairement en  $R$ .

**Remarque.** Il est conjecturé que la longueur de tels cycles croît au moins linéairement avec  $R$ , c'est-à-dire que la longueur minimale de tels cycles est linéaire (c.f. KRİKUN [3]).

L'idée est de remonter puis redescendre les arbres entre la hauteur  $R$  et la hauteur  $2R$ . On en fait le tour de la façon décrite sur la figure 13.



**FIGURE 13** – Construction d'un cycle de longueur linéaire en fonction de  $R$ . Ici,  $\theta_R$  vaut au moins 3.

On notera  $\chi_R$  le cycle obtenu par cette méthode. Si on note  $\theta_R$  le nombre d'arbres entre  $R$  et  $2R$  qui ont des enfants à hauteur  $R$ , c'est-à-dire le nombre d'ancêtres de la génération  $R$ , à la génération  $2R$ , on obtient

$$|\chi_R| = 2R\theta_R.$$

Il s'agit donc de montrer que  $\theta_R$  est majoré indépendamment de  $R$ . On peut le montrer en sommant sur une classe de forêts adéquate (voir KRİKUN [3, section 3.5]).

## Références

- [1] O. ANGEL and O. SCHRAMM. *Uniform Infinite Planar Triangulations*. arXiv:math/0207153[math.PR], 2002.

- [2] Maxim KRIKUN. *Uniform Infinite Planar Triangulation and Related Time-Reversed Critical Branching Process*. Journal of Mathematical Sciences, **131**(2) :5520–5537, 2005.
- [3] Maxim KRIKUN. *Local structure of random quadrangulations*. arXiv:math/0512304v2[math.PR], 2006.
- [4] Grégory MIERMONT. *Cartes Aléatoires*. <http://www.math.u-psud.fr/~miermont/>, 2008.